

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

1. Übung

Aufgabe 1: (Kondition und Stabilität)

- a) Bestimmen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_{rel}(x) = \kappa_{rel}^\infty(x)$ der Funktion

$$f(x) = x \ln x \quad (x > 0).$$

Ist die Funktion schlecht konditioniert für $|x| \ll 1$?

- b) Wahr oder Falsch? Ein Algorithmus zur numerischen Lösung eines Problems ist stabil, wenn das vorliegende Problem gut konditioniert ist.
- c) Wahr oder Falsch? Für schlecht konditionierte Probleme gibt es keine stabilen Algorithmen zur Lösung des Problems.

Aufgabe 2: (Auslöschung)

Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x) = 1 - \frac{2}{2 + x^2}.$$

- a) $\tilde{x}$ sei ein Näherungswert für $x = \frac{1}{30}$, der mit einem relativen Fehler von maximal 0.01% behaftet ist. Schätzen Sie den relativen Fehler in $f(x)$ ab.
- b) Berechnen Sie $f(x)$ für $x = \frac{1}{30}$ in 4-stelliger Gleitpunktarithmetik (das heißt in $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$) sowie mit Taschenrechnergenauigkeit mit folgendem Algorithmus:

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = y_1 + 2$$

$$y_3 = \frac{2}{y_2}$$

$$y_4 = 1 - y_3$$

- c) Ist der in b) angegebene Algorithmus stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! Falls der Algorithmus nicht stabil ist, geben Sie einen geeigneten Algorithmus an.

Aufgabe 3: (Maschinenzahlen)

- a) Wahr oder falsch? Die Zahl 128 ist in $\mathbb{M}(2, 1, -8, 8)$ exakt darstellbar.
- b) Wahr oder falsch? Die Zahl $\frac{1}{4}$ ist in $\mathbb{M}(10, 1, -2, 2)$ exakt darstellbar.
- c) Stellen Sie $(0.8)_{10}$ zur Basis 2 dar.
- d) Stellen Sie $\frac{1}{11}$ zur Basis 10 dar.
- e) Stellen Sie $\frac{1}{11}$ in $\mathbb{M}(10, 4, -10, 10)$ dar.

Aufgabe 4: (Gleichungssysteme)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

und eine rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten für $0 < \varepsilon < 1$ eine Störung von A ,

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

- a) Berechnen Sie die Lösung x_ε des gestörten Gleichungssystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ und die Lösung x des exakten Gleichungssystems $Ax = b$ sowie die Konditionszahl $\kappa_1(A_\varepsilon)$.
- b) Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung des gestörten Gleichungssystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ in der $\|\cdot\|_1$ -Norm unter der Annahme, dass die rechte Seite b exakt gegeben ist, ab. Geben Sie eine Bedingung an ε an, die erfüllt sein muss, damit diese Fehlerabschätzung gilt.