Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

2. Übung

Aufgabe 1: (Verständnis)

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig, aber regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

(i) Sei $B = DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Gilt dann $||B||_\infty = 1$?

(ii) Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl bzgl. $\|\cdot\|$. Ist bei Störung der Eingabedaten b der relative Fehler in der Lösung $\frac{||\tilde{x}-x||}{||x||}$ immer um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler $\frac{||\tilde{b}-b||}{||b||}$?

(iii) Gilt für die Konditionszahl $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$?

(iv) Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch mit Eigenwerten 2,3,5,8. Berechnen sie $\kappa_2(A)$.

(v) Es sei $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x und $r = b - A\tilde{x}$ das Residuum.
Gilt $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A) \cdot ||x|| \cdot ||r||$?

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(i) Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.

(ii) Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.

(iii) Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $|\det(A)| = |\det(R)|$.

(iv) Es gilt $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\right|$.

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und sei $A = LDL^T$ eine Cholesky-Zerlegung. Bestimme $\det D$.

Aufgabe 2: (Äquilibrierung/Skalierung)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^5 \\ 10^{-5} & 0.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$ und $\kappa_\infty(B)$.

b) Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode für ein Programm, dass eine Skalierung einer $n \times n$ Matrix A ausführt. Überschreiben Sie dabei die Matrix A und speichern Sie die Skalierungsinformationen in einem Vektor d.

c) Führen Sie eine Zeilenäquilibrierung an A und B durch.

d) Ermitteln Sie nun $\kappa_\infty(D_A A)$ und $\kappa_\infty(D_B B)$. Hierbei bezeichnen D_A bzw. D_B die Diagonalmatrizen zur Zeilenäquilibrierung von A bzw. B. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen aus a).

Aufgabe 3: (Pivotisierung)
Zu beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & \alpha & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Für welche α lässt sich zu A die LR–Zerlegung ohne Pivotisierung bilden? Gib L und R für diese α an.

b) Bilde die LR–Zerlegung von A mit Pivotisierung. Gib L, R und die Permutationsmatrix P an.

c) Verwende b), um $\det A$ zu bestimmen und um zu entscheiden, für welche α die Matrix A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 4: (Choleskey-Zerlegung)
Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & b & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Berechne eine Zerlgegung von A mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist dies nicht möglich?

b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit? Was können wir daraus folgern?

c) Bestimme $\det(A)$ mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.

d) Löse für $b = 3$ und $a = 2$ das lineare Gleichungssystem $Ax = c$ mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.