Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

3. Übung

Aufgabe 1: (Verständnis Givens und Householder)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$ und es sei $QR = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Des Weiteren sei $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation.
Prüfe ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, bzw. ermittle die geforderten Werte.

a) Die Ermittlung der Lösung mit Hilfe von Givens-Rotationen ist stabil.

b) $Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^Tb$.

c) Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.

d) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$.

e) Es sei $A = QR$ mit einer orthogonalen Matrix Q. Dann gilt: $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.

f) Sei $A = QR$, wobei Q eine orthogonale Matrix ist und $R = \begin{pmatrix} 2.7 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_2(A)$.

g) Die Householder-Transformation lässt sich geometrisch als Spiegelung interpretieren.

h) Es gilt: $\det(Q_v) = 1$.

i) Berechne $\det(Q_v)$ für $v = (5, 3, 5)^T$.

j) Es sei $y := (2, 3, 6)^T$, $v := y + \text{sign}(y_1)||y||_2 e^1$ und Q_v die zugehörige Householder-Matrix. e^1 bezeichnet dabei den ersten Einheitsvektor. Sei $x := Q_v \cdot y$. Gib x_1 an.

k) Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Wie viele Givens-Rotationen benötigt man maximal, um eine QR-Zerlegung zu berechnen?

l) Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Wie viele Householder-Reflexionen benötigt man maximal, um eine QR-Zerlegung zu berechnen?

Aufgabe 2: (Linearer Ausgleich)
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -4 \\ 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

a) Löse das lineare Ausgleichsproblem $x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|A\,x - b\|_2$ über Householder-Reflexionen.
Wie groß ist das Residuum?

b) Löse das lineare Ausgleichsproblem $x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|A\,x - b\|_2$ über Normalgleichungen.
Wie groß ist das Residuum?

c) Was lässt sich über die Stabilität und den Aufwand der Verfahren sagen?

Aufgabe 3 (Linearer Ausgleich)
Gegeben sind die Messwerte

t_i	-3	0	4
f_i	-2	-6	48

.

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass die Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \alpha \cdot t\cos(\pi t) + \beta \cdot (2t - 2)$$

genügen.

a) Zu bestimmen sind die optimalen Parameter α, β im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Stellen Sie ein geeignetes lineares Ausgleichsproblem auf (Messdaten einsetzen!).

b) Hat das unter a) formulierte Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen. Geben Sie die Lösung $f(t)$ sowie die 2-Norm des Residuums explizit an.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.