

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

4. Übung

Aufgabe 1: (Verständnis Iterationsmethoden)

- a) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind bzw. gib den numerischen Wert an!
- (i) Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen x^* , wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt.
 - (ii) Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen x^* , wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|$ für alle $k \geq k_0$ gilt.
 - (iii) Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$ gilt, so existiert kein Startwert $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.
 - (iv) Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.
 - (v) Wir wissen, dass $\Phi(x) = x^5$ genau einen Fixpunkt in $[-0.5, 0.5]$ hat und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ für jeden Startwert $x_0 \in [-0.5, 0.5]$ konvergiert. Mit welcher Konvergenzordnung konvergiert das Verfahren?
- b) Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der vollständigen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit der Kontraktionszahl $L < 1$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ erfüllt. Ferner sei $x_0 \in D$ und $k > 0$. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind bzw. gib den numerischen Wert an!
- (i) $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$.
 - (ii) Sei $f(x) := 0.5 \cdot \sin(x)$, $D := [-1, 1]$. Dann erfüllt f die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.
 - (iii) Sei $L := \frac{3}{4}$. Geben Sie eine möglichst kleine Zahl α an, so dass garantiert gilt:
 $\|x_2 - x^*\| \leq \alpha \|x_1 - x_0\|$

Aufgabe 2: (Singularwertzerlegung)

Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \left\| \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 14 & -8 & 10 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \\ 10 & -16 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2$$

und von der auftretenden Matrix die Singularwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie:

- a) die Ausgleichslösung mit kleinster 2-Norm.
- b) die Menge sämtlicher Lösungen des Ausgleichsproblems.

Aufgabe 3: (Mehrdimensionaler Banach)

Gesucht ist eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\cos(x_1) + \tan(x_2) - 5x_2 &= 0 \\ \sin(x_1) - 6x_1 + \ln(x_2 + 1) &= 0\end{aligned}$$

im Bereich $D = [-1, 1] \times [0, 1]$.

- a) Formuliere einen Algorithmus in Pseudocode für ein Programm, dass die Fixpunktiteration $\Phi(x, y) = (x, y)$ zu einem vorgegebenen Startwert n Mal ausführt.
- b) Stelle eine Fixpunktiteration zur Lösung des Gleichungssystems auf, und weise die Konvergenz mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes nach. Wähle für die Analyse die ∞ -Norm.
- c) Wieviele Iterationen sind höchstens erforderlich, um ausgehend vom Startwert $x^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.01$ in der ∞ -Norm zu erreichen?