RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
 INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
 Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

5. Übung

Aufgabe 1: (Verständnis)

- a) Gegeben seien zwei iterative Verfahren mit $\|x_0 - x^*\| = \|\hat{x}_0 - x^*\| = 0.2$, die in jedem Schritt dieselbe Konvergenzordnung haben. Welche Konvergenzordnungen haben die Iterationen x_k und $\hat{x}_k$?

k	1	2	3	4	5	6
$\ x_k - x^*\ $	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125
$\ \hat{x}_k - x^*\ $	0.12	0.0432	0.0059872	$9.4036997 \cdot 10^{-5}$	$2.652887 \cdot 10^{-8}$	$2.1113429 \cdot 10^{-15}$

- b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind bzw. ermittle den gesuchten Wert.
- (i) Bei mehrdimensionalen Problemen erfordert das Newton-Verfahren in jedem Iterationsschritt das Lösen eines linearen Gleichungssystems.
 - (ii) Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = |x|^{2.5} - 3$. Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 3$?

Aufgabe 2: (Bisektion - Newtonverfahren - Sekantenverfahren)

Bestimme die Nullstelle(n) von

$$f(x) = e^{-x} - x$$

bis auf einen absoluten Fehler von 0.01, mittels

- a) Bisektion
- b) Newton-Verfahren
- c) Sekantenverfahren.

Hinweis: Eine obere Schranke für den absoluten Fehler $|x_k - x^*|$ lässt sich per Einschluss bestimmen: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x_k \leq b$ und $f(a)f(b) < 0$, dann gilt $|x_k - x^*| \leq b - a$, wobei $x^* \in (a, b)$ Nullstelle von f und x_k die Iterierte in Schritt k ist.

Aufgabe 3: (Newton-Verfahren in $\mathbb{R}^n$)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - y &= 4 \\y^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} &= \frac{33}{4}\end{aligned}$$

sollen iterativ mit dem Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

- a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).
- b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 2. Quadranten

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und führen Sie zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Aufgabe 4: (Nichtlinearer Ausgleich)

Gegeben seien folgende Stützstellen x_i und Messwerte y_i

x_i	0	0.5	1.0
y_i	-0.4	0.7	2.5

Gemäß theoretischen Überlegungen genügen diese Daten einer Funktion

$$f(t) = e^{t+a} + b.$$

- Formulieren Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Parameter a und b .
- Überführen Sie das Problem mittels Substitution in ein lineares Ausgleichsproblem. Stellen Sie dieses explizit auf.
- Bestimmen Sie die Lösung des in b) aufgestellten Ausgleichsproblems mittels QR-Zerlegung. Wie lautet die zugehörige Lösung des ursprünglichen Problems?
- Wie groß ist das Residuum?