

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

6. Übung

Aufgabe 1: (Verständnis)

Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n] f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

- a) Es gilt: $\delta_n = [x_0, \dots, x_n] f$.
- b) Falls die Funktion f ein Polynom vom Grad maximal n ist, dann gilt: $f(x) = P(f | x_0, \dots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- c) Es gilt: $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ für alle x .
- d) Es gilt:

$$\delta_n = \frac{[x_1, \dots, x_n] f - [x_0, \dots, x_{n-1}] f}{x_n - x_0}$$

- e) Es seien $f(x) = \ln(x) + 2x^2$ und $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$. Bestimme $P(f | x_0, x_1, x_2)(1)$.
- f) Das Polynom $P(f | x_0, \dots, x_n)$ ist eindeutig.
- g) Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Polynoms $P(f | x_0, \dots, x_n)$.
- h) Es seien $f(x_0) = 2$ und $f(x_1) = -1$. Berechnen Sie $P(f | x_0, x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.

Aufgabe 2: (Nichtlinearer Ausgleich)

Die gegenseitige Abhängigkeit zweier Größen T und t lasse sich durch eine Funktion f ausdrücken:

$$T = f(t) := 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + t^2}.$$

Um den noch unbekannten Parameter α zu bestimmen, machen Sie ein Experiment und erhalten folgende Messwerte:

t_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
T_i	1.55	1.65	1.8	1.95	2.1

- Formulieren Sie die Aufgabe, den Parameter α zu ermitteln, als nichtlineares Ausgleichsproblem.
- Nähern Sie die Lösung an, indem Sie ausgehend vom Startwert $\alpha_0 = 0$ zwei Iterationen des Gauß-Newton-Verfahrens durchführen.

Aufgabe 3: (Interpolation)

Die Funktion

$$f(x) := 2 \sin(3\pi x)$$

soll durch Polynome an den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{12}$ und $x_2 = \frac{1}{6}$ interpoliert werden.

- a) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)(x)$ an der Stelle $y_0 = \frac{1}{24}$ mit dem Neville-Aitken-Schema aus.
- b) Bestimmen Sie die Lagrange- und die Newton-Darstellung des Polynoms $P(f|x_0, x_1, x_2)(x)$.
- c) Werten Sie die Newton-Darstellung aus Teilaufgabe b) mit dem Horner-Schema an den Stellen $y_1 = \frac{1}{10}$ aus.
- d) Nun wird zusätzlich eine neue Stützstelle $x_3 = \frac{1}{3}$ dazugenommen. Ermitteln Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x)$. Welche Darstellung wählen Sie?

Aufgabe 4: (Neville-Aitken)

Für die Funktion F ist eine Wertetabelle gegeben

x	-1	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	-2	1	3	3	2	1	1

- Gesucht ist eine möglichst gute Näherung für $F(1.5)$ mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades. Welche Stützstellen wählen Sie, um dieses Polynom zu bestimmen, und warum? Berechnen Sie den entsprechenden Näherungswert mit dem Neville-Aitken-Schema.
- Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil a) berechneten Näherungswert an.

Hinweis: Es gilt $|F^{(n)}(x)| \leq 2^n + 4$, für alle n und alle $x \in [-1, 5]$.