

Lösungsskizze zu Übung 6, Aufgabe 4

In dieser Aufgabe soll die Fehlerschätzung

$$|f(1.5) - P(f|x_0, x_1, x_2)| \leq \underbrace{\frac{1}{3!} \max_{\xi \in [-1, 5]} |f^{(3)}(\xi)|}_{=: M_3(f)} \cdot \underbrace{|x_0 - 1.5| \cdot |x_1 - 1.5| \cdot |x_2 - 1.5|}_{=|\omega_3(1.5)|} \quad (1)$$

für Stützstellen $-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq 5$ verwendet werden, vgl. VL12 Folien 13ff.

Der Faktor $M_3(f)$ ist hierbei nur von der zu interpolierenden Funktion f , aber nicht von der Wahl der Stützstellen abhängig. Um möglichst geeignete Stützstellen x_0, x_1, x_2 für die Polynominterpolation zu wählen, minimiere also den verbleibenden Faktor $|\omega_3(1.5)|$, d.h.

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2 \quad \text{oder} \quad x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Der gesuchte Wert $P(f|x_0, x_1, x_2)(1.5)$ kann dann mittels Neville-Aitken bestimmt werden, vgl. Aufgabe 3:

$$P(f|x_0, x_1, x_2)(1.5) = 3.25 \quad \text{bzw.} \quad P(f|x_0, x_1, x_2)(1.5) = 3.125.$$

Als Fehlerschätzer kann wieder (1) verwendet werden, womit man (mithilfe des Hinweises) jeweils die Fehlerschranke

$$|f(1.5) - P(f|x_0, x_1, x_2)(1.5)| \leq \frac{2^3 + 4}{6} \cdot 1.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$$

erhält.