Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

7. Übung

Aufgabe 1: (Verständnis)

a) Es sei f auf dem Intervall $[a, b]$ hinreichend oft stetig differenzierbar. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Newton-Cotes-Quadraturformel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Newton-Cotes-Formel.

(i) Es sei $f \in C^4([a, b])$ und $t_j = a+jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$. Bei der summierten Simpsonregel $S(h) = \frac{h}{6}\sum_{j=1}^n \Big(f(t_{j-1}) + 4f(\frac{t_{j-1}+t_j}{2}) + f(t_j)\Big)$ gilt: $I(f) - S(h) = \mathcal{O}(h^4)$.

(ii) Berechne eine Approximation von $\int_1^7 x^2$ mit Hilfe der Simpsonregel.

(iii) Es gilt $w_j \geq 0$ für alle j.

(iv) Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi\, x)\,dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel für $n = 2$.

(v) Es gilt $I_m(f) = I(f)$ für alle $f \in \Pi_m$.

(vi) Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^4 e^x$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.

b) Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.

(i) Es seien $I_m^{NC}(f)$ und $I_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $I_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $I_m^G(f)$.

(ii) Sowohl bei den Newton-Cotes Formeln als auch bei der Gauß-Quadratur lassen sich die Gewichte (bei gegebenen Stützstellen) als Integrale der Lagrangen-Fundamentalpolynome berechnen.

(iii) Die Stützstellen der Gauß-Quadraturformeln sind nicht unbedingt äquidistant.

(iv) Gib den Exaktheitsgrad der Simpsonregel an.

(v) Die Gewichte von Gauß-Quadraturformeln sind stets positiv.

(vi) Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grade 4.

(vii) Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte w_j von der Funktion f ab.

Aufgabe 2: (Newton-Cotes)
Für die Funktion $f(x) = \sin(x^2)$ steht keine analytische Stammfunktion zur Verfügung. Es ist also eine Näherung des Integrals

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{0} \sin(x^2)\ dx$$

gesucht.

a) Wieviele Unterteilungen sind höchstens erforderlich, um mit summierten Trapezregel eine Genauigkeit von $7.15 \cdot 10^{-4}$ zu erreichen? (Geben Sie eine möglichst kleine Zahl an!)

b) Berechnen Sie für die summierte Simpsonregel die Näherung zum obigen Integral mit $n = 2$ und schätzen Sie den Fehler ab.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\max_{\xi \in [-\sqrt{\pi}/2, 0]} \left| f^{(4)}(x) \right| \leq 60$ für $f(x) = \sin(x^2)$ gilt.

Aufgabe 3: (Quadraturformel mit Fehlerabschätzung)
Gegeben sei die Quadraturformel

$$Q(f) = wf\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + wf\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)$$

mit $w \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, die Näherungsweise das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ berechnet.

a) Leiten Sie die Werte für w und α so her, dass die Quadraturformel mindestens Exaktheitsgrad 3 hat.

b) Wir betrachten nun die Summierte Gaußformel mit zwei Stützstellen:
Bestimmen Sie für diese Formel eine geeingnete Anzahl an Teilintervallen n, so dass der Quadraturfehler für das Integral $\int_0^1 e^{\sin(x)}dx$ unter $\varepsilon = 10^{-3}$ bleibt.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\max\limits_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(\xi)| \leq 3ie$, $i = 1, 2, .., 5$, für $f(x) = e^{\sin(x)}$ gilt.