Numerische Mathematik für Maschinenbauer, SS 09
Aufgabe 3.9

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 8 & 7 & -7 & -6 \\ -6 & 16 & -2 & 13 \\ -10 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Lösung von $A\,x = b$ mit Gaußelimination.

b) Bestimme die Lösung von $A\,x = c$ mit Gaußelimination.

c) Berechne die Determinante von A.

d) Bestimme die L-R-Zerlegung von A.

e) Berechne nochmals die Determinante von A.

f) Löse nun $A\,x = b$ und $A\,x = c$ mit der L-R-Zerlegung von A.

Lösung:

a) Gaußelimination für Ax=b:

$$(A \mid b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 2 \\ 8 & 7 & -7 & -6 & | & 2 \\ -6 & 16 & -2 & 13 & | & 21 \\ -10 & 0 & 1 & 12 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der benötigten Faktoren $l_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(j)}}{a_{j,j}^{(j)}}$ (vgl. Buch Dahmen/Reusken S.68) und Berechnung der neuen Einträge:

$$l_{2,1} = \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} = \frac{8}{2} = 4, \quad l_{3,1} = \frac{a_{3,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} = \frac{-6}{2} = -3, \quad l_{4,1} = \frac{a_{4,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} = \frac{-10}{2} = -5$$

$a_{2,1}^{(2)} = 0,\ \ a_{2,2}^{(2)} = 7 - 4 \cdot 3 = -5,\ \ a_{2,3}^{(2)} = -7 - 4 \cdot (-2) = -7 + 8 = 1,\ \ a_{2,4}^{(2)} = -6 - 4 \cdot (-1) = -6 + 4 = -2$
$a_{3,1}^{(2)} = 0,\ \ a_{3,2}^{(2)} = 16 - (-3) \cdot 3 = 25,\ \ a_{3,3}^{(2)} = -2 - (-3) \cdot (-2) = -2 - 6 = -8,\ \ a_{3,4}^{(2)} = 13 - (-3) \cdot (-1) = 10$
$a_{4,1}^{(2)} = 0,\ \ a_{4,2}^{(2)} = 0 - (-5) \cdot 3 = 15,\ \ a_{4,3}^{(2)} = 1 - (-5) \cdot (-2) = -9,\ \ a_{4,4}^{(2)} = 12 - (-5) \cdot (-1) = 12 - 5 = 7$
$b_2^{(2)} = 2 - 4 \cdot 2 = -6,\ \ b_3^{(2)} = 21 - (-3) \cdot 2 = 21 + 6 = 27,\ \ b_4^{(2)} = 3 - (-5) \cdot 2 = 13$

$$\Rightarrow (A \mid b)^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -6 \\ 0 & 25 & -8 & 10 & | & 27 \\ 0 & 15 & -9 & 7 & | & 13 \end{pmatrix}$$

Zweiter Schritt (analoge Elimination von $a_{3,2}^2$ und $a_{4,2}^2$):

$$l_{3,2} = \frac{a_{3,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} = \frac{25}{-5} = -5, \quad l_{4,2} = \frac{a_{4,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} = \frac{15}{-5} = -3$$

$a_{3,2}^{(3)} = 0,\ \ a_{3,3}^{(3)} = -8 - (-5) \cdot (1) = -8 + 5 = -3,\ \ a_{3,4}^{(3)} = 10 - (-5) \cdot (-2) = 0$
$a_{4,2}^{(3)} = 0,\ \ a_{4,3}^{(3)} = -9 - (-3) \cdot 1 = -9 + 3 = -6,\ \ a_{4,4}^{(3)} = 7 - (-3) \cdot (-2) = 7 - 6 = 1$
$b_3^{(3)} = 27 - (-5) \cdot (-6) = 27 - 30 = -3,\ \ b_4^{(3)} = 13 - (-3) \cdot (-6) = 13 - 18 = -5$

$$\Rightarrow (A \mid b)^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & | & -5 \end{pmatrix}$$

Dritter Schritt (Elimination von $a_{4,3}^3$):

$$l_{4,3} = \frac{a_{4,3}^{(3)}}{a_{3,3}^{(3)}} = \frac{-6}{-3} = 2$$
$$\Rightarrow \quad a_{4,3}^{(4)} = 0, \quad a_{4,4}^{(4)} = 1 - 2 \cdot 0 = 1, \quad b_4^{(4)} = -5 - 2 \cdot (-3) = -5 + 6 = 1$$

$$\Rightarrow (A \mid b)^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$x_4 = \frac{b_4^{(4)}}{a_{4,4}^{(4)}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{-3} \cdot (-3 - 0 \cdot x_4) = 1$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{-5} \cdot (-6 - 1 \cdot x_3 - (-2) \cdot x_4) = -\frac{1}{5} \cdot (-6 - 1 + 2) = 1$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \cdot (2 - 3 \cdot x_2 - (-2) \cdot x_3 - (-1) \cdot x_4) = \frac{1}{2} \cdot (2 - 3 + 2 + 1) = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Bestimmung einer L-R-Zerlegung von A anhand von Aufgabenteil a)

Hierbei setzt sich die Matrix L aus den zuvor bestimmten Faktoren $l_{i,j}$ zusammen und bei R handelt es sich um die durch Gaußelimination erlangte obere Dreiecksmatrix (ohne die Spalte b):

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Gaußelimination für Ax=c:

$$(A \mid c)^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 1 \\ 8 & 7 & -7 & -6 & | & 1 \\ -6 & 16 & -2 & 13 & | & 1 \\ -10 & 0 & 1 & 12 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Da es sich um dieselbe Matrix A handelt wie in Aufgabenteil a) ändern sich die Faktoren $l_{i,j}$ und damit die L-R-Zerlegung von A nicht; wir haben lediglich eine neue rechte Seite c. Bei der Gaußelimination kann man das aber nicht wirklich ausnutzen:

$$l_{2,1} = 4, \quad l_{3,1} = -3, \quad l_{4,1} = -5$$
$$\Rightarrow c_2^{(2)} = 1 - 4 \cdot 1 = -3, \quad c_3^{(2)} = 1 - (-3) \cdot 1 = 4, \quad c_4^{(2)} = 1 - (-5) \cdot 1 = 6$$

$$\Rightarrow (A \mid c)^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 25 & -8 & 10 & | & 4 \\ 0 & 15 & -9 & 7 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$l_{3,2} = -5, \quad l_{4,2} = -3$$
$$\Rightarrow c_3^{(3)} = 4 - (-5) \cdot (-3) = -11, \quad c_4^{(3)} = 6 - (-3) \cdot (-3) = -3$$

$$\Rightarrow (A \mid c)^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & -11 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$l_{4,3} = 2 \Rightarrow c_4^{(4)} = -3 - 2 \cdot (-11) = 19$$

$$\Rightarrow (A \mid c)^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 19 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{c_4^{(4)}}{a_{4,4}^{(4)}} = \tfrac{19}{1} = 19 \\ \Rightarrow \quad x_3 &= \tfrac{1}{-3} \cdot (-11 - 0 \cdot x_4) = \tfrac{11}{3} \approx 3.66667 \\ \Rightarrow \quad x_2 &= \tfrac{1}{-5} \cdot (-3 - 1 \cdot x_3 - (-2) \cdot x_4) = -\tfrac{1}{5} \cdot (-3 - \tfrac{11}{3} + 38) = -\tfrac{94}{15} \approx -6.26667 \\ \Rightarrow \quad x_1 &= \tfrac{1}{2} \cdot (1 - 3 \cdot x_2 - (-2) \cdot x_3 - (-1) \cdot x_4) = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + 3 \cdot \tfrac{94}{15} + 2 \cdot \tfrac{11}{3} + 19) = \tfrac{346}{15} \approx 23.0667 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \approx \begin{pmatrix} 23.0667 \\ -6.26667 \\ 3.66667 \\ 19 \end{pmatrix}$$

c) Zur recht aufwendigen Berechnung der Determinante von A greifen wir auf Maple zurück und erhalten

$$det(A) = 30$$

e) Mithilfe der L-R-Zerlegung lässt sich die Determinante dagegen sehr leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} det(A) &= det(L \cdot R) = det(L) \cdot det(R) \\ &= 1 \cdot (r_{1,1} \cdot r_{2,2} \cdot r_{3,3} \cdot r_{4,4}) \qquad \text{(L ist untere normierte Dreiecksmatrix)} \\ &= 2 \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot 1 \\ &= 30 \end{aligned}$$

f) Lösung von $Ax = b$ und $Ax = c$ mithilfe der L-R-Zerlegung (Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen):

$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LRx = b$; löse also zunächst $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen und dann $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$(L \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ -3 & -5 & 1 & 0 & | & 21 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} & y_1 = 2 \\ \Rightarrow & y_2 = 2 - 4 \cdot y_1 = -6 \\ \Rightarrow & y_3 = 21 - (-3) \cdot y_1 - (-5) \cdot y_2 = 21 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-6) = -3 \\ \Rightarrow & y_4 = 3 - (-5) \cdot y_1 - (-3) \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 = 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-6) - 2 \cdot (-3) = 1 \end{aligned}$$

$$(R \mid y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \;\Rightarrow\; x_3 = 1 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{-5} \cdot (-6 - x_3 + 2 \cdot x_4) = -\frac{1}{5} \cdot (-5) = 1 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{2} \cdot (2 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dasselbe für das Gleichungssystem $Ax = c$:

$$(L \mid c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 & | & 1 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} & y_1 = 1 \\ \Rightarrow & y_2 = 1 - 4 \cdot y_1 = -3 \\ \Rightarrow & y_3 = 1 - (-3) \cdot y_1 - (-5) \cdot y_2 = 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) = -11 \\ \Rightarrow & y_4 = 1 - (-5) \cdot y_1 - (-3) \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 = 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-11) = 19 \end{aligned}$$

$$(R \mid y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 19 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} x_4 &= 19 \;\Rightarrow\; x_3 = 11/3 \approx 3.66667 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{-5} \cdot (-3 - x_3 + 2 \cdot x_4) = -\frac{1}{5} \cdot (\frac{94}{3}) = -\frac{94}{15} \approx -6.26667 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{692}{15} = \frac{346}{15} \approx 23.0667 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \approx \begin{pmatrix} 23.0667 \\ -6.26667 \\ 3.66667 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle: Die Ergebnisse stimmen mit denen aus a) und b) überein.