Lösungshinweise zu den Quadraturformeln auf einem Intervall $[a,b]$

Die Formeln und Fehlerabschätzungen sind auf dem Intervall $[-1,1]$ bekannt. Sie müssen nun auf das Intervall $[a,b]$ übertragen werden. Die Transformation

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] & \rightarrow & [a,b] \\ g(t) & & f(x) \end{array}$$

wird durch

$$[a,b] \ni x = \frac{b-a}{2}\, t + \frac{b+a}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2} \tag{1}$$

realisiert. Das bedeutet für das Integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(t)\frac{dx}{dt}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt. \tag{2}$$

Nun zur Fehlerabschätzung: Da

$$g(t) = f(x(t)) = f\left(\frac{b-a}{2}\, t + \frac{b+a}{2}\right)$$

folgt

$$\frac{d^m g}{dt^m} = \frac{d^m f}{dx^m}\, \left(\frac{dx}{dt}\right)^m. \tag{3}$$

Das ergibt für die Fehlerabschätzung der Trapezregel ($R_2^{[-1,1]}f = -2/3\; f''(\psi)$)

$$\tilde{R}_2^{[a,b]}f = -\frac{2}{3}f''(\psi)\quad \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{Integral(2)} \qquad \underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}_{Transformation(1,3)} \qquad = -\frac{1}{12}f''(\psi)\;(b-a)^3$$