Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & \alpha(\alpha-2) \\ \alpha\beta & 0 & \alpha^2\beta+1 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha-2) & 0 & \alpha^2(\alpha-2)+\dfrac{\beta}{(\alpha-2)^3} \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α und β is A positiv definit.

b) Berechne die Determinante von A.

c) Für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $b = (6, -3, 7, -7)^T$ berechne man die Lösung von $Ax = b$.

d) Welche Vorteile hat die L-D-L^T-Zerlegung gegenüber der L-R-Zerlegung?

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.782 & 0.918 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.917 \\ 0.333 \end{pmatrix}.$$

Alle Werte in A und b sind auf drei Stellen genau gerundet. Mit welchem relativen und welchem absoluten Fehler (gemessen in der 1-Norm) muß man für x rechnen?

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Zur Berechnung der Funktion $f(x) = \cos x$ steht die folgende Tabelle zur Verfügung.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
$\sin x$	0.0000	.2474	.4794	.6816	.8415	.9490	.9975
$\cos x$	1.000	.9689	.8776	.7317	.5403	.3153	.07074

a) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.9)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerten und gib eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.1)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Gib eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(e^x e^{-y} + \ln(x+1)\right) \\ \frac{1}{5}\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2\right) \end{pmatrix}.$$

a) Zeige: In $[0,2]^2$ hat F genau einen Fixpunkt.

b) Wieviele Iterationen sind mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen?

c) Stelle obige Fixpunktgleichung in ein Nullstellenproblem um und führe ausgehend vom Startwert $(0,0)^T$ zwei Schritte mit dem vereinfachten Newtonverfahren durch.