Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

a) Löse $Ax = b$ durch LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung. Gib L und R an.

b) Sei nun

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

eine gestörte Version von A. Berechne *iterativ* eine Näherungslösung des Gleichungssystems $\tilde{A}x = b$ (Nachiteration). Führe einen Schritt durch.
ACHTUNG: Gauss oder LR von $\tilde{A}$ gibt 0 Punkte in b).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine Kurve mit der Darstellung $f(x) = a\,x + \ln(b\,(x+1))$ soll derart an drei Meßpunkte (x_i, y_i) angepaßt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate minimal ist. Berechne a und b zu

x_i	0	1	4
y_i	0	1	3

Benutze dabei nicht die Normalgleichungen.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Bestimme eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + y - 10 &= 0 \\ x + y^2 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

im Bereich $D = [-3, -2] \times [3, 4]$. Reduziere dabei **nicht** auf den skalaren Fall.

a) Wieviele Iterationen sind mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$ zu erreichen? Wie groß ist der Fehler (höchstens) nach der 1. Iteration?

b) Verbessere die in a) gewonnene Näherung mittels eines Schrittes des Newton–Verfahrens.

c) Führe nun einen weiteren Schritt des Fixpunktverfahrens durch und gib erneut eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \sin 2x$ ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.1	0.2	0.3
$\sin 2x$	0.0	0.1987	0.3894	0.5646

a) Berechne einen Näherungswert für $f(0.15)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte und gib eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechne einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.05)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 3. Gib eine Fehlerabschätzung an.