Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 8-\alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

c) Lösen Sie $Ax = b$ mittels Cholesky-Verfahren für $\alpha = 0$. (L-R-Zerlegung / Gauß gibt 0 Punkte!)

d) Für welche Werte von α ist $A^T A$ **nicht** positiv definit?

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_0^1 \sin(x^2)dx$$

steht kein geschlossener analytischer Ausdruck zur Verfügung. Wir müssen also auf eine numerische Methode zurückgreifen.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der

   i) summierten Mittelpunktregel,

   ii) summierten Trapezregel,

   iii) summierten Simpsonregel,

   um die Zielgenauigkeit von $\epsilon = 7.5 * 10^{-4}$ zu erreichen?
   Hinweis: Für $f(x) = \sin(x^2)$ gilt $\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(4)}(\xi)| < 29$

b) Führen Sie die Berechnung gemäß a)(iii) durch.

c) Es folgt eine Wertetabelle für die Funktion

$$I(\alpha) = \int_0^1 \sin(x^\alpha)dx$$

α	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25
$I(\alpha)$	0.708394	0.521870	0.410486	0.337810	0.286856	0.249204	0.220265

Überprüfen Sie mit Hilfe dieser Tabelle den in b) erhaltenen Wert mittels einer möglichst guten Interpolation dritten Grades (Neville-Aitken Schema).
Hinweis: Teil c) ist eigentlich eine eigenständige Aufgabe.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

t_i	1	2	3
y_i	4	1	1/2

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, daß diese Meßdaten einer Funktion

$$y(t) = C\, e^{-\lambda t}$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter C und λ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem und führen Sie ausgehend vom Startwert $(C_0, \lambda_0) = (10, 1)$ einen Gauss-Newton-Schritt aus. Berechnen Sie anschließend das Residuum.
Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Gesucht ist die Nullstelle der Funktion

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 3\, x\, y + 5 \\ -2\, y^2 + 5\, x\, y - 4 \end{pmatrix}$$

im 1. Quadranten. Bestimmen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (2, 1)$ Näherungen der Nullstelle mit jeweils zwei Schritten

a) des Newton-Verfahrens,

b) des vereinfachten Newton-Verfahrens.