

Aufgabe 1

(6.5 Punkte)

Gegeben seien die Daten

t_i	-1	0	1	2
y_i	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5

Theoretischen Überlegungen zufolge genügen diese der Darstellung

$$y(t) = \alpha + \beta t^2.$$

- a) Wie ist die *least-squares*-Lösung für dieses Problem definiert?
- b) Bestimmen Sie die *least-squares*-Lösung mit Hilfe der QR-Zerlegung und benutzen Sie dabei Householder-Spiegelungen. Gehen Sie **nicht** zu den Normalgleichungen über.

Hinweis: Rechnen Sie weitestgehend mit Brüchen.

- c) Wie groß ist das Residuum?

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Gegeben sei die Fixpunktgleichung

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin^2(x),$$

wobei das Sinusargument im Bogenmaß zu nehmen ist.

- a) Zeigen Sie, daß die zugehörige Fixpunktiteration für jeden Startwert aus \mathbb{R} konvergiert.
- b) Führen Sie mit dem Startwert $x_0 = 7.5$ zwei Fixpunktiterationen durch.
- c) Führen Sie mit demselben Startwert zwei Iterationen des Newton-Verfahrens durch, um die Lösung der obigen Fixpunktgleichung zu finden.

Aufgabe 3

(5.5 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'''(t) - \left(t + \frac{1}{2}\right) y(t) - (t + 4) y'(t) = 0 \quad \text{für } t \in [1, 3/2]$$

mit den Anfangswerten

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = -\frac{3}{2}, \quad y''(1) = 0.$$

- a) Formen Sie die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung um, und bestimmen Sie die zugehörigen Anfangswerte.

- b) Lösen Sie das resultierende Problem näherungsweise mit der Trapezmethode zur Schrittweite $h = 1/2$. Dabei auftretende lineare Gleichungssysteme sollen mit der LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung) gelöst werden.
- c) Geben Sie eine Näherung für $y'''(3/2)$ an.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \ln x$ ist als Tabelle gegeben.

x	2	4	6	8
$\ln x$	0.69315	1.3863	1.7918	2.0794

- a) Berechnen Sie einen Näherungswert für $f(5)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.
- b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.25)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 2.

Hinweis: Benutzen Sie $\ln 1 = \dots$ und $\ln(1/x) = -\ln x$, um geeignete Stützstellen zu bekommen.