Aufgabe 1 (11 Punkte)

Der Ausdruck

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}, \qquad x > 1,$$

soll an der Stelle $x = 100$ ausgewertet werden. Dieser Wert ist mit einem relativen Fehler von 1% behaftet.

a) Schätzen Sie den relativen Fehler von $f(x)$ ab (in erster Näherung).

b) Berechnen Sie $f(x)$ für $x = 100$ in 4stelliger und in 6stelliger Gleitpunktarithmetik, wobei Sie folgenden Algorithmus verwenden:

$$\begin{array}{lll} y_1 & := & x^2, \\ y_2 & := & y_1 - 1, \\ y_3 & := & \sqrt{y_2}, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} y_4 & := & x - y_3, \\ y_5 & := & 1/y_4. \end{array}$$

c) Erklären Sie die Resultate in b). Wie läßt sich das auftretende Problem vermeiden?

d) Welche Probleme treten auf, wenn f für $x = 1.0001$ ausgewertet werden soll? Können diese mit demselben Algorithmus wie in c) vermieden werden?

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x^2 + 5y^2 - 6xy &= 8 \\ x^2 + xy &= 1 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen des Newtonverfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien die Meßwerte

t_i	1	4	9
f_i	-1	0	2

einer Größe $f(t)$, welche von der Form

$$f(t) = a + b\sqrt{t}$$

vermutet wird. Die Parameter a, b sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden.

a) Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem, welches a und b eindeutig festlegt.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem über die Normalgleichungen mittels LDL^T-Zerlegung. Gegeben Sie L und D explizit an. Wie groß ist das Residuum?

c) Wie kann man ein lineares Ausgleichsproblem alternativ behandeln? (Methode benennen!) Ein lösbares Ausgleichsproblem wird mit beiden Verfahren und derselben Gleitpunktarithmetik behandelt. Wann wird die Abweichung in den beiden Ergebnissen stärker und welches ist dann das bessere Ergebnis? (Begründung!)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
$F(x)$	0.0	.67258	1.3052	1.8670	2.3416	2.7267	3.0310

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.8)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerte und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.1)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: $F(x)$ ist die Stammfunktion von $e^{\cos x}$.