Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & -0.8 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ -0.4 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 6.6 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Geben sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR–Zerlegung.

c) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $\tilde{A} \cdot x = b$, wobei $\tilde{A}$ eine Störung von A ist. Wie groß darf der relative Fehler in A höchstens sein, damit der relative Fehler in x nicht größer als 3% ist? **Hinweis:** Für die Kondition von A bzgl. der 1-Norm gilt $\kappa_1(A) \approx 15.56$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$e^{-x^2} = 2x.$$

a) Stellen Sie eine geeignete Fixpunktfunktion F auf. In welchem Intervall können überhaupt Fixpunkte liegen? (Wertebereich von F beachten!)

b) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für das F aus a). Führen Sie ausgehend von einem geeigneten Startwert x_0 (dieser ist auf eine Nachkommastelle zu runden) zwei Schritte des Fixpunktverfahrens durch, und geben Sie dann eine a–posteriori–Fehlerschätzung an.

c) Führen Sie zwei Schritte des Newton–Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$ durch, um eine Näherungslösung zu erhalten.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(t)\, dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f(x_i)$	0.0000	0.045293	0.14270	0.30709	0.78540

a) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung von 3 Tabellenwerten, und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.2)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3, und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.
Hinweis: f ist punktsymmetrisch im Ursprung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) + y'(t) - 2\,t\,y(t) = 0, \qquad y(2) = 5, \;\; y'(2) = 4.$$

a) Berechnen Sie mit dem verbesserten Euler–Verfahren und der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ jeweils eine Approximation von $y(3)$ und $y'(3)$.

b) Geben Sie eine Näherung für $y''(3)$ an.