Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A sowie der Vektor b mit

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 644 & -96 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 322 & -47.99 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR–Zerlegung von A (exakt!). Geben Sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie mittels der LR–Zerlegung aus a) das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ in **3-stelliger** Gleitpunktarithmetik.

c) Berechnen Sie das Residuum (Taschenrechnergenauigkeit). Geben Sie eine Begründung für das *schlechte* Resultat.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10000 & 5 \\ 7 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.69 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_1(A)$ der Matrix. Ist A gut oder schlecht konditioniert?

b) Mit welchem relativen Fehler in x (in der 1-Norm) muß man rechnen, wenn statt des ursprünglichen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ das gestörte Gleichungssystem $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ gelöst wird, wobei $\tilde{A}$ und $\tilde{b}$ Störungen von A bzw. b mit einem relativen Fehler von maximal 2% sind?

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ \tfrac{x^2}{16} + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösungen verdeutlicht. Bestimmen Sie für den 1. Quadranten einen *guten* ganzzahligen Startwert (x_0, y_0).

b) Gesucht ist nun die Lösung im ersten Quadranten. Geben Sie eine geeignete Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach.

c) Wieviele Schritte sind (ausgehend von dem in a) gewählten Startwert) höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erzielen. Verwenden Sie die a–priori–Fehlerabschätzung.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an.

e) Geben Sie die anderen Lösungen mit der selben Genauigkeit (ohne weitere Rechnung) an.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Das Integral

$$I = \int_{-4}^{4} e^{-2\,x^2}\, dx$$

soll mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und anschließender Romberg–Extrapolation zur Schrittweitenfolge $h_i := 8 \cdot 2^{-i},\ i = 0, 1, \ldots, 4$ approximiert werden.

a) Ergänzen Sie folgendes Extrapolationsschema:

$$
\begin{array}{lllllllll}
T(h_0) = T_{00} = 0.00000 & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
T(h_1) = T_{10} = 4.00000 & \rightarrow & T_{11} = \ldots & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & \\
T(h_2) = T_{20} = 2.00134 & \rightarrow & 1.33512 & \rightarrow & 1.06858 & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_3) = T_{30} = \ldots & \rightarrow & 1.02801 & \rightarrow & T_{32} = \ldots & \rightarrow & 1.00656 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_4) = T_{40} = 1.25331 & \rightarrow & 1.24731 & \rightarrow & 1.26192 & \rightarrow & 1.26596 & \rightarrow & T_{44} = \ldots
\end{array}
$$

Welcher Wert approximiert I am besten?

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $T(h_4)$ an.

c) Von welcher Ordnung ist (theoretisch) der Wert T_{43}?