Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -90 \\ -11 & 0 & 9 \\ 88 & -11 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -10.5 \\ -2.4 \\ 28.7 \end{pmatrix}.$$

a) Jede Komponente von b sei mit einem relativen Meßfehler von $0.5 \cdot 10^{-3}$ behaftet; die Matrix A sei ungestört. Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) müssen Sie rechnen?

Hinweis: $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.72$.

b) Lösen Sie $A\,x = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmethik durch Gaußelimination **mit** Skalierung (Zeilenequilibrierung) und **mit** Spaltenpivotisierung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ soll interpoliert werden. Gegeben ist folgende Tabelle:

x	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75
$f(x)$	1.0314	1.2947	1.8884	2.9642	4.7966	7.8533

a) Gesucht ist ein Näherungswert für $f(1.0)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte. Ergänzen Sie dazu das folgende Tableau:

$$
\begin{array}{l|lllllllllll}
x_0 = 0.25 & 1.0314 \\
 & & \searrow \\
x_1 = 0.75 & 1.2947 & \to & 1.42632 \\
 & & \searrow & & \searrow \\
x_2 = 1.25 & P_{2,0} & \to & 1.59155 & \to & 1.55025 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_3 = 1.75 & 2.9642 & \to & 1.35054 & \to & P_{3,2} & \to & 1.54077 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_4 = 2.25 & 4.7966 & \to & P_{4,1} & \to & 1.63427 & \to & 1.54846 & \to & 1.54366 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_5 = 2.75 & 7.8533 & \to & -2.84521 & \to & 2.51124 & \to & P_{5,3} & \to & 1.54092 & \to & P_{5,5}
\end{array}
$$

Welchen Grades ist das Polynom, das dem Wert von $P_{5,5}$ zu Grunde liegt?

b) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.1)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie, **nicht** aber die Beziehung $f(0) = 1$ aus!

c) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für das in b) berechnete Interpolationspolynom für das Intervall $[-0.25, 0.25]$ an.

Hinweis: Führen Sie eine Extremwertbestimmung des Knotenpolynoms $\omega(x) = \prod(x - x_i)$ durch!

Aufgabe 3 (4.5 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\cos(x)\,dx.$$

a) Bestimmen Sie mit der summierten Trapezregel eine Näherung so, dass der Fehler garantiert kleiner als $2 \cdot 10^{-2}$ ist.

b) Wieviele Unterteilungen sind für die summierte Simpsonregel erforderlich, damit die Näherung maximal um 10^{-5} vom exakten Integralwert abweicht?

Aufgabe 4 (4.5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) - \frac{y(t)}{t\,y''(t)} = 0, \qquad y(0.3) = 0.5,\ \ y'(0.3) = 1,\ \ y''(0.3) = 0.5.$$

a) Berechnen Sie mit drei Schritten des expliziten Euler–Verfahrens jeweils eine Approximation von $y(0.9)$ und $y'(0.9)$.

b) Geben Sie auch eine Näherung für $y'''(0.9)$ an.