Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & -6 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 12 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 33 \\ -4 \\ 124 \\ 28 \\ 65 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Cholesky– Zerlegung (LDL^T–Zerlegung) von A und geben Sie L und D explizit an.

b) Warum ist A nicht (symmetrisch) positiv definit?

c) Warum ist die in a) berechnete Zerlegung durchführbar, obwohl A nicht (symmetrisch) positiv definit ist? Welche Probleme **können** bei nicht (symmetrisch) positiv definiten Matrizen gegebenenfalls auftreten?

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Hilfe der in a) berechneten Zerlegung.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die vier Meßwerte

x_i	-1.6	-0.9	0.75	2.7
y_i	1.6	-0.9	1.0	-1.0

die der Theorie nach zu einer Ellipse der Form

$$\alpha\, x^2 + \beta\, x\, y + \gamma\, y^2 - 10 = 0$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Die Behandlung obigen Ausgleichsproblems $(A|b)$ für vier Meßwerte führt bei der Lösung mittels orthogonaler Transformationen auf ein oberes Dreieckssystem $(R|Q\,b)$.
Nun erhaltene Sie eine weitere Meßung (x_5, y_5). Das dazu gehörige lineare Ausgleichsproblem unter Verwendung von $(R|Q\,b)$ sei dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7.8 & 3.2 & -1.9 & -14 \\ 0 & -2.2 & 0.74 & -4.4 \\ 0 & 0 & -2.2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -0.26 \\ 5.85 & -2.4 & 0.98 & 10 \end{array}\right).$$

Lösen Sie dieses (Givens-Rotationen) und geben Sie α, β und γ sowie das Residuum explizit an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Zur Bestimmung des Integerals $I = \int_a^b f(x)\,dx$ sei folgende Quadraturformel mit 2 Stützstellen gegeben ($H = b - a$):

$$I \approx I_2(f) = \frac{H}{2}\left[f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) H\right) + f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) H\right)\right]. \tag{1}$$

Der Fehler dieser Formel ist gegeben durch

$$E_2(f) = I - I_2(f) = \frac{H^5}{4320} f^{(4)}(z), \qquad z \in (a, b). \tag{2}$$

a) Leiten Sie für die Quadraturformel (1) die summierte Formel für n Teilintervalle mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ her und geben Sie für diese eine Fehlerabschätzung unter Benutzung von (2) an.

b) Wenden Sie die summierte Formel aus a) an auf das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx \qquad (= \ln 2)$$

mit $n = 2$ und schätzen Sie den Fehler ab.

c) Wieviel Teilintervalle sind erforderlich, um mit der in a) aufgestellten Formel das Integral bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ zu bestimmen?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$y''(t) + 2\, y'(t) + \sin(t)\, y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0.4) = y'(0.4) = 1.$$

Bestimmen Sie mit dem verbesserten Euler-Verfahren eine Näherung für $y'(1)$. Wählen Sie h dazu so, daß Sie 3 Schritte benötigen.