Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 743 & -235 \\ 5 & -2.99 & 2.01 \\ 4 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Skalieren Sie A.

b) Berechnen Sie die LR–Zerlegung mit Pivotisierung zu der skalierten Matrix aus a).

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ mittels der in a) und b) gewonnen Resultate, d.h. über LR–Zerlegung mit Skalierung und Pivotisierung.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

e) Die Lösung des Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Gaußelimination und Pivotisierung in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik ist $x_G = (0.909, -1.78, -5.52)^T$. Warum ist dieses Ergebnis mit einem so großen Fehler behaftet? **Hinweis:** Die 1- und die ∞-Norm von A^{-1} sind in der Größenordnung 3.5.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Bestimmen Sie eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + 3\,y &= \sin x \\ e^{-y}\cos x &= 3\,x \end{aligned} .$$

a) Stellen Sie dazu eine geeignete Fixpunktgleichung auf, und zeigen Sie, daß diese den Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt. Starten Sie Ihre Untersuchungen in dem Gebiet $D = [0, 2/3] \times [-2/3, 2/3]$.

b) Ausgehend von einem geeignetem Startvektor führe man 2 Iterationen aus und gebe eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

t_i	1	2	4
f_i	0.2	0.7	0.6

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{-\lambda(t-a)^2}$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 3$, $\lambda_0 = 0.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? Geben Sie die Werte 3-stellig an. (Der erste Schritt muß nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie das Residuum explizit an.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_{0.8}^{2.8} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

a) Wieviele Unterteilungen (n) sind höchstens erforderlich, um mit der summierten Trapezregel eine Genauigkeit von 10^{-5} zu erreichen?

b) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel zum obigen Integral Näherungen mit $n = 1, 2, 4$ und führen Sie danach eine geeignete vollständige Extrapolation durch. Wie läßt sich der Fehler jetzt schätzen?

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 743 & -235 \\ 5 & -2.99 & 2.01 \\ 4 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Skalieren Sie A.

b) Berechnen Sie die LR–Zerlegung mit Pivotisierung zu der skalierten Matrix aus a).

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ mittels der in a) und b) gewonnen Resultate, d.h. über LR–Zerlegung mit Skalierung und Pivotisierung.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

e) Die Lösung des Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Gaußelimination und Pivotisierung in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik ist $x_G = (0.909, -1.78, -5.52)^T$. Warum ist dieses Ergebnis mit einem so großen Fehler behaftet? **Hinweis:** Die 1- und die ∞-Norm von A^{-1} sind in der Größenordnung 3.5.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Bestimmen Sie eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + 3\,y &= \sin x \\ e^{-y}\cos x &= 3\,x \end{aligned} .$$

a) Stellen Sie dazu eine geeignete Fixpunktgleichung auf, und zeigen Sie, daß diese den Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt. Starten Sie Ihre Untersuchungen in dem Gebiet $D = [0, 2/3] \times [-2/3, 2/3]$.

b) Ausgehend von einem geeignetem Startvektor führe man 2 Iterationen aus und gebe eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

t_i	1	2	4
f_i	0.2	0.7	0.6

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{-\lambda(t-a)^2}$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 3$, $\lambda_0 = 0.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? Geben Sie die Werte 3-stellig an. (Der erste Schritt muß nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie das Residuum explizit an.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_{0.8}^{2.8} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

a) Wieviele Unterteilungen (n) sind höchstens erforderlich, um mit der summierten Trapezregel eine Genauigkeit von 10^{-5} zu erreichen?

b) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel zum obigen Integral Näherungen mit $n = 1, 2, 4$ und führen Sie danach eine geeignete vollständige Extrapolation durch. Wie läßt sich der Fehler jetzt schätzen?

Scheinklausur zur Numerischen Mathematik I

für Studierende der Fachrichtung Maschinenbau

24. Februar 2003

NAME: ____________________ MATR: ________________

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 743 & -235 \\ 5 & -2.99 & 2.01 \\ 4 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Skalieren Sie A.

b) Berechnen Sie die LR–Zerlegung mit Pivotisierung zu der skalierten Matrix aus a).

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ mittels der in a) und b) gewonnen Resultate, d.h. über LR–Zerlegung mit Skalierung und Pivotisierung.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

e) Die Lösung des Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Gaußelimination und Pivotisierung in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik ist $x_G = (0.909, -1.78, -5.52)^T$. Warum ist dieses Ergebnis mit einem so großen Fehler behaftet? **Hinweis:** Die 1- und die ∞-Norm von A^{-1} sind in der Größenordnung 3.5.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Bestimmen Sie eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + 3\,y &= \sin x \\ e^{-y}\cos x &= 3\,x \end{aligned} \quad .$$

a) Stellen Sie dazu eine geeignete Fixpunktgleichung auf, und zeigen Sie, daß diese den Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt. Starten Sie Ihre Untersuchungen in dem Gebiet $D = [0, 2/3] \times [-2/3, 2/3]$.

b) Ausgehend von einem geeignetem Startvektor führe man 2 Iterationen aus und gebe eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

t_i	1	2	4
f_i	0.2	0.7	0.6

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{-\lambda(t-a)^2}$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 3$, $\lambda_0 = 0.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? Geben Sie die Werte 3-stellig an. (Der erste Schritt muß nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie das Residuum explizit an.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_{0.8}^{2.8} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

a) Wieviele Unterteilungen (n) sind höchstens erforderlich, um mit der summierten Trapezregel eine Genauigkeit von 10^{-5} zu erreichen?

b) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel zum obigen Integral Näherungen mit $n = 1, 2, 4$ und führen Sie danach eine geeignete vollständige Extrapolation durch. Wie läßt sich der Fehler jetzt schätzen?