Diplom – VP **Numerik** 31. März 2003

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.0 & 0.1 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ 0.6 & 2.8 & -0.7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 3.6 \\ 5.0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, Geben sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der ∞-Norm.
(**Hinweis:** Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.604$.)

d) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\|b - \tilde{b}\|_\infty / \|b\|_\infty$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ nicht größer als 5% ist?

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Gegeben seien

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem $Mx = b$ soll mit Hilfe einer LDL^T–Zerlegung der Matrix M gelöst werden.

a) Geben Sie an, welche Einträge in der Matrix L aufgrund der speziellen Struktur von M überhaupt berechnet werden müssen. Begründen Sie ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die LDL^T–Zerlegung von M mit Hilfe des Cholesky–Verfahrens. Geben Sie L und D explizit an.

c) Für welche Werte von α ist M positiv definit?

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $Mx = b$ mit Hilfe der in Aufgabenteil b) berechneten Zerlegung für $\alpha = 2$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sind die drei Meßwerte

t_i	0	2	3
y_i	3	1	1

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha \frac{1}{1+t} + \beta\, t$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x^2 + 3\,x\,y \\ x^2 + 3\,y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Besimmen Sie mit dem Fixpunktverfahren die (eindeutige) Lösung im ersten Quadranten auf eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-3}$, und führen Sie für die letzte Iterierte eine a-posteriori Fehlerabschätzung durch.
Hinweis: Bestimmen sie (mittels einer Skizze) zunächst ein Gebiet $D = [a, b] \times [c, d]$ mit ganzen Zahlen a, b, c und d, in dem der Fixpunkt liegt. Weisen Sie dann die Abbildung von D in ein Teilgebiet $D' \subset D$ nach. Zeigen Sie dann die Kontraktivität in D'. Runden Sie Ihren Startwert (in beiden Komponenten) auf eine Nachkommastelle.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_1^5 \ln(x^2 + 1)\, dx.$$

a) Wieviele Unterteilungen (n) sind höchstens erforderlich, um mit der summierten Trapezregel eine Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-3}$ zu erreichen?

b) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel zum obigen Integral Näherungen mit $n = 2, 4, 8$. Führen Sie danach eine geeignete vollständige Extrapolation durch. Wie läßt sich der Fehler des zuletzt berechneten Wertes schätzen?

Aufgabe 6 (10 Punkte)

a) Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) = t^2 y''(t) + t y'(t) - 3y(t) + 3$$

mit Anfangswerten $y'''(1) = y'(1) = 2,\ y''(1) = y(1) = -1$.
Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangswerte an.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} (z_2(t))^3 \\ t^2 z_1(t) + 3z_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $\mathbf{z}(t) = \big(z_1(t), z_2(t)\big)^T$. Berechnen Sie mit dem expliziten Euler–Verfahren und der Schrittweite $h = 0.5$ sowie dem verbesserten Euler–Verfahren und der Schrittweite $\tilde{h} = 1$ jeweils eine Approximation von $\mathbf{z}(2)$.