

Aufgabe 1

(10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 2.8 & 0.1 \\ 0.6 & 0.0 & -0.7 \\ 1.2 & 2.4 & 1.2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.2 \\ 6.0 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die LR -Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R explizit an.
- Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR -Zerlegung.
- Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der 1-Norm.
Hinweis: Es gilt $\|A^{-1}\|_1 \approx 1.642$.
- Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\|b - \tilde{b}\|_1/\|b\|_1$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_1/\|x\|_1$ nicht größer als 2% ist?

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x^2y + 5y^2 - 6xy &= 10 \\ y^2 + xy &= 0.5 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen sowohl des Newton-Verfahrens als auch des vereinfachten Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert jeweils

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(t) - y(t) - t^2y'(t) - 2 = 0$$

mit Anfangswerten $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$.Berechnen Sie mit dem impliziten Euler-Verfahren mittels zweier Schritte Approximationen für $y(2)$ und $y'(2)$.**Aufgabe 4**

(10 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_0^2 e^{\sin x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

- Wieviel Schritte (n) braucht man mit der

i) summierten Mittelpunktregel,

ii) summierten Trapezregel,

um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erreichen? Schätzen Sie dazu die entsprechende Ableitung ab, ohne Extrema zu benutzen.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$.

Hinweis: Für $f(x) = e^{\sin x}$ gilt $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$.