Diplom – VP **Numerik** 22. September 2003

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 3.01 \\ 3.0 & 1.0 & 6.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der 1-Norm.
(**Hinweis:** Es gilt $\|A^{-1}\|_1 \approx 10.204$.)

d) Mit welchem Fehler in x (relativ und absolut) muss man rechnen, wenn man statt mit A mit der Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 3.0 \\ 3.0 & 1.0 & 6.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

rechnet?

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sind die vier Meßwerte

t_i	0	1/2	1	3/2
y_i	2.1	-1.1	-1.8	0.9

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha \cos(\pi t) + \beta \sin(\pi t)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Normalgleichungen.

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem aus a) mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^y + \sin x &= 1 + \sin(2) \\ 2x^2 + \frac{y^2}{2} &= 6 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen sowohl des Newton-Verfahrens als auch des vereinfachten Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert jeweils

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x \ln(\cos t)\, dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$F(x)$	-0.001339	-0.01084	-0.03739	-0.09158	-0.1875	-0.3473	-0.6159

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von drei Tabellenwerten und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.9)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 3. Werten Sie das Polynom hornerartig aus. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: $F(x)$ ist die Stammfunktion von $\ln(\cos x)$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\cos x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der

   1. summierten Mittelpunktregel,
   2. summierten Trapezregel,

   um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erreichen? Schätzen Sie dazu die entsprechende Ableitung ab, ohne Extrema zu benutzen.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$.
   Hinweis: Für $f(x) = e^{\cos x}$ gilt $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(t) + ty'(t) = 0$$

mit Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 0$.

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangswerte an.

b) Berechnen Sie mit dem impliziten Euler–Verfahren mittels zweier Schritte eine Näherung für $y(5)$.

c) Geben Sie eine Näherung für $y''(5)$ an.