Diplom – VP **Numerik** 22. März 2004

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei der Ausdruck $f(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x}, \qquad x > 0,\ y > -x.$

a) Berechnen Sie die Kondition von f und betrachten Sie dabei insbesondere die Fälle

   (i) $y = \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$ (d. h. $y \approx 0$),

   (ii) $y = -(x - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ (d. h. $y \approx -x$).

b) Schätzen Sie den relativen Fehler von f in 1. Ordnung ab für $(x, y) = (10, -9.9999)$. x und y seien jeweils mit einem relativen Fehler von $0.5 \cdot 10^{-4}$ behaftet. Auf wieviel Stellen ist dann f genau?

c) Berechnen Sie $f(3, 10^{-3})$ in 4–stelliger und 6–stelliger Gleitpunktarithmethik mit folgendem Algorithmus:

$$f_1 := x + y, \qquad f_2 := \sqrt{f_1}, \qquad f_3 := \sqrt{x}, \qquad f_4 := f_2 - f_3.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis und geben Sie gegebenenfalls einen verbesserten Algorithmus an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.867 & 0.635 \\ 0.618 & 0.473 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.345 \\ 0.678 \end{pmatrix}.$$

a) Alle Werte in A und b sind auf drei Stellen genau gerundet. Mit welchem relativen und welchem absoluten Fehler (gemessen in der ∞-Norm) mu"s man f"ur x rechnen?

b) Nun sei b exakt. Wie groß darf der relative Fehler in A höchstens sein, damit der relative Fehler in x kleiner als 20% ist?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte f_i

t_i	1	2	3
f_i	0.8	−0.8	−1

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, daß diese Meßdaten einer Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} + b$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem, und führen Sie ausgehend vom Startwert $(a_0, b_0) = (0.3, -1)$ einen Gauß–Newton–Schritt durch. Berechnen Sie anschließend das Residuum.
Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2 + 6\,y^2 &= 16 \\ x\,y + x &= 2 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösungen verdeutlicht. Bestimmen Sie für den 1. Quadranten einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.

b) Geben Sie für die Lösung im ersten Quadranten eine geeignete 2d-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen und schauen Sie schon mal auf c).

c) Wieviele Schritte sind ausgehend von dem Startwert $(x_0, y_0) = 0.5(x_u + x_o, y_u + y_o)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erzielen.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_3, y_3) an.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
$F(x)$	0	0.1237	0.2403	0.3448	0.4352	0.5118	0.5762	0.6301

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.6)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerten, und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.6)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Werten Sie das Polynom hornerartig aus. Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung an, d.h.: Bestimmen Sie die Extrema der entsprechenden Ableitung.

Hinweis: $F^{(4)}(x) = -24\dfrac{x\,(x^2-2)}{(x^2+2)^4}$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Eine erzwungene Schwingung (mit äußerer harmonischer Kraft) führt nach Einsetzen der physikalischen Größen auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$s''(t) = -0.5\,s'(t) - 5\,s(t) + 2\,\cos(\pi t)$$

mit Anfangswerten $s(0.5) = 0.5$ und $s'(0.5) = -1$.

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangswerte an.

b) Berechnen Sie mit dem verbesserten Euler–Verfahren mittels zweier Schritte eine Näherung für $s(1.5)$. Geben Sie diese und auch Näherungen für $s'(1.5)$ und $s''(1.5)$ explizit an.