Diplom – VP **Numerik** 13. September 2004

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -40 \\ 80 & -10 & 10 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Skalieren (Zeilenäquilibrierung) Sie A und bestimmen Sie die LR-Zerlegung der skalierten Matrix. Geben Sie L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A. (Mit Zwischenergebnissen, sonst **0 Punkte**)

c) Das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit $b = (-50, 280, -30)^T$ soll mit der LR-Zerlegung aus a) gelöst werden. Transformieren Sie b so ($\rightarrow \tilde{b}$), dass man direkt mit dem Vorwärtseinsetzen ($L \cdot y = \tilde{b}$) beginnen kann. (D.h.: Nur $\tilde{b}$ angeben, Lösung des Gleichungssystems nicht gefordert!)

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Eine approximative LR-Zerlegung folgender Matrix A sei bekannt:

$$A = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.25 & 0.2 \\ 0.25 & 0.2 & 0.17 \\ 0.2 & 0.17 & 0.12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1 & 0 \\ 0.6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.33 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.25 & 0.2 \\ 0.2475 & 0.1975 & 0.17 \\ 0.198 & 0.17 & 0.12 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = (1, 0.8, 0.6)^T$ mit obiger approximativer LR-Zerlegung.

b) Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. der 1-Norm) müssen Sie rechnen?
Hinweis: $\|A^{-1}\|_1 \approx 103.42$.

c) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = (2, 0, 2)^T$ einen Nachiterationsschritt aus. (Residuum mit Taschenrechnergenauigkeit, sonst mindestens 4-stellig.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

t_i	0.1	0.3	0.5
f_i	0.5	−0.2	0.7

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = \cos(\omega t + \phi)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$ explizit auf (Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $\omega_0 = 3$, $\phi_0 = 0.7$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie das Residuum explizit an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x\,y + y &= 3.5 \\ 4\,x^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösungen verdeutlicht. Bestimmen Sie für den 1. Quadranten einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.

b) Geben Sie für die Lösung im ersten Quadranten eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen und schauen Sie schon mal auf c).

c) Wieviele Schritte sind ausgehend von dem Startwert $(x_0, y_0) = 0.5(x_u + x_o, y_u + y_o)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$ zu erzielen.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_3, y_3) an.

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ soll interpoliert werden. Gegeben ist folgende Tabelle:

x	0.20	0.60	1.00	1.40	1.80	2.20
$f(x)$	0.20134	0.63665	1.17520	1.90430	2.94217	4.45711

a) Gesucht ist ein Näherungswert für $f(1.2)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte. Berechnen Sie dazu die im folgenden Tableau fehlenden Werte $P_{i,k}$. (unterhalb der Aufgabenstellung)

$$\begin{array}{r|lclclclclcl}
x_0 = 0.20 & 0.20134 & & & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & & \\
x_1 = 0.60 & 0.63665 & \rightarrow & 1.28963 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
x_2 = 1.00 & 1.17520 & \rightarrow & 1.44448 & \rightarrow & P_{2,2} & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_3 = 1.40 & 1.90430 & \rightarrow & P_{3,1} & \rightarrow & 1.51593 & \rightarrow & 1.51047 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_4 = 1.80 & P_{4,0} & \rightarrow & 1.38537 & \rightarrow & 1.50115 & \rightarrow & 1.50854 & \rightarrow & 1.50927 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_5 = 2.20 & 4.45711 & \rightarrow & 0.66978 & \rightarrow & 1.56426 & \rightarrow & P_{5,3} & \rightarrow & 1.50972 & \rightarrow & P_{5,5}
\end{array}$$

Welchen Grades ist das Polynom, das dem Wert von $P_{5,3}$ zu Grunde liegt?

b) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.1)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3. Werten Sie dazu das Polynom **hornerartig** aus.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie (f ist ungerade), **nicht** aber die Beziehung $f(0) = 0$ aus!

c) Geben Sie eine Fehlerabschätzung für das in b) berechnete Interpolationspolynom für das Intervall $[-0.2, 0.2]$ an.

Hinweis: Führen Sie eine Extremwertbestimmung des Knotenpolynoms $\omega(x) = \prod(x - x_i)$ durch!

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Das Integral

$$I = \int_{-2}^{2} \cos(x^2)\,dx$$

soll mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und anschließender Romberg–Extrapolation zur Schrittweitenfolge $h_i := 4 \cdot 2^{-i},\ i = 0, 1, \ldots, 4$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie die Werte, die im folgenden Extrapolationsschema fehlen. (unterhalb der Aufgabenstellung)

$$
\begin{array}{lcccccccc}
T(h_0) = T_{00} = \text{-2.614574} & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
T(h_1) = T_{10} = 0.692713 & \to & 1.795142 & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & \\
T(h_2) = T_{20} = 1.426961 & \to & T_{21} & \to & 1.663482 & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_3) = T_{30} = \ldots & \to & 0.929972 & \to & 0.880523 & \to & 0.868095 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_4) = T_{40} = 0.954807 & \to & 0.921669 & \to & T_{42} & \to & 0.921760 & \to & T_{44}
\end{array}
$$

Welcher Wert approximiert I am besten?

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $T(h_4)$ an.

c) Von welcher Ordnung ist (theoretisch) der Wert T_{32}?

d) Schätzen Sie den Fehler von T_{44}.