Diplom – VP **Numerik** 21. März 2005

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung. **ACHTUNG:** Alle anderen Wege ergeben 0 Punkte!

c) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der ∞-Norm.
$\left(\textbf{Hinweis:} \text{ Es gilt } \|A^{-1}\|_\infty = \frac{5}{3}.\right)$

d) Mit welchem Fehler in $\tilde{x}$ (relativ und absolut) muss man rechnen, wenn man die obige Lösung für das Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} = b$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3.01 \\ 4 & 2 & 8.03 \\ 2 & 2 & 4.01 \end{pmatrix}$$

verwendet? Benutzen Sie eine entsprechende Fehlerformel!

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 12+\alpha^2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

c) Lösen Sie $Ax = b$ mittels Cholesky-Verfahren ($\mathrm{L\,D\,L}^T$) für $\alpha = 4$. (L-R-Zerlegung / Gauß gibt 0 Punkte!)

d) Für welche Werte von α ist $A^T A$ **nicht** positiv definit? **Begründung!!**

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte f_i

t_i	-2	-1	1
f_i	$-1/5$	$-1/10$	-3

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \frac{a\,t^2}{(t-b)^3}$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem, und führen Sie ausgehend vom Startwert $(a_0, b_0) = (3, 2)$ einen Gauß–Newton–Schritt durch. Berechnen Sie anschließend das Residuum.
Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y - 4\,y &= 0 \\ 1 + y^2 - 4\,x^2 &= 0 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage **aller** Lösungen verdeutlicht und geben Sie mit Hilfe Ihrer Skizze Näherungen dafür an. Bestimmen Sie für den 3. Quadranten ($x, y \leq 0$) einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt. **Hinweis:** Aus der ersten Gleichung folgt eine Abschätzung für $|y|$. (Welche?) Deswegen darf man für die Skizze $\sin y \approx y$ verwenden.

b) Geben Sie für die Lösung im dritten Quadranten eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen und schauen Sie schon mal auf c).

c) Wieviele Schritte sind ausgehend von dem Startwert $(x_0, y_0) = 0.5(x_u + x_o, y_u + y_o)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$ zu erzielen.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an.

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4
$F(x)$	0	0.37965	0.65767	0.80674	0.86527	0.88208	0.88562

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.8)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerte und geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.75)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: $F(x)$ ist die Stammfunktion von e^{-x^2}. Man berechen $F'(x)$ und $F''(x)$. Es gilt $F^{(3)}(x) = (4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}$, $\quad F^{(4)}(x) = x\,(12 - 8\,x^2)\,e^{-x^2}$, $\quad F^{(5)}(x) = (16\,x^4 - 48\,x^2 + 12)\,e^{-x^2}$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Für die Bogenlänge eines Ellipsenabschnitts gilt $S = F(s_1; s_0) = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s}\; ds$ (a und b Hauptachsen). Für $a = 2$ und $b = 4$ sollen numerisch Näherungen für $F(3\pi/4, \pi/4)$ bestimmt werden.

a) Wieviele Schritte (n) braucht man mit der

1. summierten Mittelpunktregel,
2. summierten Trapezregel,

um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ zu erreichen?
Hinweis: Die abzuschätzende Ableitung hat lokale Extrema bei $z \cdot \pi/2$ mit $z \in \mathbb{Z}$

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für S mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$.
Hinweis: Das Maximum des Betrages der abzuschätzenden (vierten) Ableitung ist 78.