Diplom – VP **Numerik** 05. September 2005

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion
$$f(x) := \sqrt{x^2 - 100}\,.$$
Bestimmen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_{\mathrm{rel}}(f)$ an der Stelle $x = 10.2$.

b) Es sei nun $\tilde{x} := 10.1$ als gestörtes Eingangsdatum gegeben. Wie groß ist einerseits der zu erwartende und andererseits der tatsächliche relative Fehler r_f gegenüber dem exakten Wert $f(10.2)$. Was beobachten Sie und warum ist das möglich?

c) Bringen Sie die Funktion $f(x)$ auf eine bei $x \approx 10$ numerisch stabilere Form.

d) Berechnen Sie in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik die folgenden beiden Ausdrücke:
$[(1000 + 4) + 3] + 2$
$[(2 + 3) + 4] + 1000$
Geben Sie jeweils den absoluten Fehler gegenüber dem exakten Wert an. Welche Regel bzgl. einer günstigen Summationsreihenfolge können Sie hieraus ableiten?

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -15 & 45 & 40 \\ 0.7 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 25 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := DA$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Bestimmen Sie die Determinante von A.

d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung aller Matrizen (D, P, L, R).

e) Setzen Sie die verwendeten Verfahren (Zeilenskalierung, Pivotisierung) in Bezug zu den Begriffen "Kondition" und "Stabilität".

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{16 - \dfrac{y^2}{4}} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(x-2)}{3} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [3,4] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie bei der Definition der Kontraktionskonstante die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (3.99, 0.5)$ zwei Fixpunktiterationen durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a–priori und eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Warum ist das Ergebnis gemäß der a–posteriori–Abschätzung meist wesentlich genauer als gemäß der a–priori–Abschätzung?

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Die Funktion $y(t) := t^{-\alpha}\cos(\beta t)$ soll im Sinne minimaler Fehlerquadrate an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0.6	0.75	1	1.3
y_i	−2.5	0.02	0.99	−0.2

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem explizit auf in Abhängigkeit von α und β durch Einsetzen aller Messwerte.

b) Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem, das im k-ten Iterationsschritt des Gauß-Newton-Verfahrens zu lösen ist, explizit auf in Abhängigkeit von α_k und β_k durch Einsetzen aller Messwerte.

Hinweis: Vorsicht beim Differenzieren! Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}t^{-\alpha} = -t^{-\alpha}\ln t$.

c) Für die Startwerte $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 2\pi$ ergibt sich im ersten Iterationsschritt des Gauß-Newton-Verfahrens das linearisierte Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -1.148 & 0.98 \\ 0 & 1.333 \\ 0 & 0 \\ 0.048 & -0.732 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha_0 \\ \Delta\beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.253 \\ -0.02 \\ 0.01 \\ 0.017 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

Lösen Sie dieses mittels Givens-Rotationen und bestimmen Sie $\alpha_1 := \alpha_0 + \Delta\alpha_0$ und $\beta_1 := \beta_0 + \Delta\beta_0$.

d) Bestimmen Sie nach diesem Iterationsschritt sowohl das Residuum des linearisierten als auch des nichtlinearen Ausgleichsproblems.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

a) Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0.12946	0.87652	1.39501

Bestimmen Sie an der Stelle $x = 1.5$ den Wert $p_3(1.5)$ des Interpolationspolynoms dritten Grades, indem Sie das folgende Neville-Aitken-Schema komplettieren:

$$\begin{array}{r|lllllll}
x_0 = 0 & 0 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 1 & 0.12946 & \to & 0.19419 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 2 & 0.87652 & \to & & \to & 0.42579 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 3 & 1.39501 & \to & 0.61728 & \to & 0.53156 & \to &
\end{array}$$

Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für $p_3(1.5)$ unter der Annahme, dass die Werte zu der Funktion $y(x) := \int_0^x \sin(\pi t^2/8)\mathrm{d}t$ gehören, und dass $x_0^{(5)} := 1.8359$ die einzige Nullstelle von $y^{(5)}(x)$ im Intervall $(0,3)$ ist.

Hinweis: Es gilt $y^{(4)}(x) = -\frac{\pi^2}{16}\left[3x\sin(\pi x^2/8) + \frac{\pi x^3}{4}\cos(\pi x^2/8)\right]$.

b) Gegeben seien nun die Bedingungen $q_3(0) = 0$, $q_3'(0) = 1$, $q_3(1) = 1$, $q_3'(1) = 0$. Stellen Sie das Interpolationspolynom $q_3(x)$ unter Verwendung des Newton-Schemas auf.

c) Warum ist es nicht sinnvoll, den Polynomgrad bei der Interpolation sehr groß zu wählen?

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) - 2ty'(t) + y(t) = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

a) Formulieren Sie das äquivalente System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie eine Näherung für $y''(1/2)$, indem Sie zwei Schritte mit dem expliziten Eulerverfahren machen.

c) Bestimmen Sie eine Näherung für $y''(1/2)$, indem Sie einen Schritt mit der (impliziten) Trapezregel machen. Lösen Sie das sich dabei ergebende lineare Gleichungssystem mit einer Gauß-Elimination.

d) Welche Problemklasse ergibt sich, wenn man ein implizites Verfahren verwendet, um ein nichtlineares System von Anfangswertproblemen zu lösen? Welches in der Vorlesung besprochene Verfahren würden Sie hierbei verwenden?