Diplom – VP **Numerik** 27. März 2006

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung (ohne Zeilenäquilibrierung), d. h. $PA = LR$. Geben Sie die Matrizen L und R explizit an.

b) Lösen Sie in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der LR-Zerlegung aus Teil a) (sonst 0 Punkte!).

c) Für den relativen Fehler der Matrix A gelte nun $r_A \leq 5 \cdot 10^{-4}$. Wie groß darf der relative Fehler r_b der rechten Seite b höchstens werden, damit für den relativen Fehler der Lösung $r_x \leq 10^{-2}$ gilt? Wie groß darf r_A höchstens sein, damit die Fehlerformel verwendet werden darf?
Hinweis: Verwenden Sie hierbei stets die $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = 1.133$.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an. (Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

b) Für welche Werte von α und β ist A positiv definit?

c) Bestimmen Sie die Determinante von A.

d) Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^T x = b$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{16}} \\ \dfrac{(x+1)^2}{7} + 1.5 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(y) \\ F_2(x) \end{pmatrix} =: F(x,y)$$

a) Skizzieren Sie die Kurven $x = F_1(y)$ und $y = F_2(x)$ und markieren Sie alle Schnittpunkte der beiden Kurven.

b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für $F(x,y)$ in $E := [1,2] \times [2,3]$ erfüllt sind. (Reduktion auf eine einzige Gleichung durch gegenseitiges Einsetzen gibt 0 Punkte!)

c) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (1.5, 2.5)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 10^{-3}$ anzunähern?

d) Geben Sie eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Ebene E sei definiert durch den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und die beiden Richtungsvektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad x = x_0 + \alpha u + \beta v, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Gesucht ist derjenige Punkt $x \in E$, welcher in der $\|\cdot\|_2$-Norm den kürzesten Abstand zu dem außerhalb der Ebene liegenden Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ hat.

a) Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem für den speziellen Fall

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$$

mittels Givens-Rotationen.
Bestimmen Sie den Abstand zwischen x und y in der $\|\cdot\|_2$-Norm.

c) Unter welchen Bedingungen wird die Kondition (gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm) eines linearen Ausgleichsproblems besonders schlecht?

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	0	0.4055	0.6931	0.9163	1.0986

a) Berechnen Sie die vier fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{l|lllllllll}
x_0 = 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
x_1 = 1.5 & 0.4055 & \to & [\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}]\mathbf{y} & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 = 2 & 0.6931 & \to & 0.5754 & \to & -0.2356 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_3 = 2.5 & 0.9163 & \to & 0.4463 & \to & [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \to & 0.0710 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_4 = 3 & 1.0986 & \to & [\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}]\mathbf{y} & \to & -0.0816 & \to & 0.0316 & \to & [\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}]\mathbf{y}
\end{array}$$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $p_4(x)$ vom Grad 4 in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_4(x) - y(x)|$ im **Intervall** $[1, 3]$ an unter der Annahme, dass die Tabellenwerte zu der Funktion $y(x) = \int_0^x \ln(t) \mathrm{d}t$ gehören.
Hinweis: Für das Knotenpolynom ist keine Extremwertbetrachtung gefordert, sondern eine einfache Abschätzung ausreichend.

d) Wie klein muss allgemein der äquidistante Abstand h zwischen den $n+1$ Stützstellen $x_0 \dots x_n$ gewählt werden, damit unter den Annahmen $|y^{(n+1)}(x)| \leq M$ und $\prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \leq n! h^{n+1}$ für den Fehler des Interpolationspolynoms $p_n(x)$ vom Grade n gilt: $|p_n(x) - y(x)| < \varepsilon$?

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Das Integral

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

soll mit der summierten Trapezregel und anschließender Romberg-Extrapolation zur Schrittweitenfolge $h_i := 2\pi \cdot 2^{-i}$, $i = 0, 1, \dots, m = 3$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie die drei eingerahmten Werte T_{10}, T_{31}, T_{33} in dem folgenden Extrapolationsschema:

$$
\begin{array}{lclclcl}
T(h_0) = T_{00} = 0 & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
T(h_1) = \mathbf{T_{10}} = \boxed{} & \rightarrow & T_{11} & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_2) = T_{20} = 3.57080 & \rightarrow & T_{21} & \rightarrow & 3.68220 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_3) = T_{30} = 3.67102 & \rightarrow & \mathbf{T_{31}} = \boxed{} & \rightarrow & 3.70379 & \rightarrow & \mathbf{T_{33}} = \boxed{}
\end{array}
$$

Hinweis: Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|T(h_3) - I|$ an.
Hinweis: Mit $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ gilt $\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f^{(2)}(x)| = \frac{1}{3}$.

c) Schätzen Sie den Fehler $|T_{32} - I|$.

d) Warum spielt Auslöschung beim Romberg-Algorithmus keine Rolle?

e) Wie hängt der Fehler $|T_{mm} - I|$ von m ab?
Ist es bei endlicher relativer Maschinengenauigkeit eps sinnvoll, m beliebig groß zu wählen (Begründung!)?