Diplom – VP **Numerik** 28. August 2006

Multiple-Choice-Test (20 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.
Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort −0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe −2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 10 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 20 Punkten** erreichen.
Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1 Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler verstärken, wenn man exakte Arithmetik zur Auswertung benutzt.
- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion ist nie größer als 1.
- ◯ Ein stabiler Algorithmus impliziert eine gute Kondition.
- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler aufgrund von Instabilitäten im verwendeten Algorithmus verstärken.

MC 2. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $b,\ \Delta b,\ x,\ \Delta x \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$ sei x die Lösung von $A\,x = b$ und $x + \Delta x$ die Lösung von $A\,(x+\Delta x) = b + \Delta b$. Es sei $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
- ◯ $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A\|^{-1} \, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
- ◯ $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\Delta b\|$
- ◯ $\|\Delta x\| \leq \|A\| \, \|\Delta b\|$

MC 3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x,\, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen zur Zahl der benötigten Operationen (kurz “Ops”) (nur Multiplikationen und Divisionen) an.

- ◯ Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ◯ Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops

MC 4. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, so dass $Q\,A = R$ gilt. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ $\|A\,x - b\|_2 = \|QR\,x - b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ Die Matrix R kann man mittels Givens–Rotationen bestimmen
- ◯ Die Matrix R kann man mittels Gauß–Elimination bestimmen

MC 5. Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Falls $\Phi'(x^*) < 0$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$
- ◯ Falls $|\Phi'(x^*)| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein
- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel größer als 1
- ◯ Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1

MC 6. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. Beim Newton–Verfahren wird oft eine Dämpfungsstrategie benutzt. Diese dient dazu,

- ◯ die Konvergenzordnung des Verfahrens zu verbessern
- ◯ globale Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten
- ◯ den Einzugsbereich des Verfahrens zu vergrößern
- ◯ den Rechenaufwand pro Iteration zu dämpfen

MC 7. Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $P(\Phi \mid x_0, \ldots, x_n) = \Phi$ für alle Polynome Φ
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$
- ◯ Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \left| P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x) \right|$ wird für wachsendes n immer kleiner

MC 8. Es sei $I := \int_c^d f(x)\,dx$, $h := d - c$, $m > 0$ und $x_j = c + \frac{j\,h}{m}$ für $j = 0, \ldots, m$. Wir definieren $I_m(f) := \int_c^d P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$ wobei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_m))$ mit $x_0 < \ldots < x_m$ ist. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $I_m(f)$ definiert die Gauß-Quadratur zur Approximation von I
- ◯ $I_2(f) = \frac{h}{6}\left(f(c) + 4f(\frac{d+c}{2}) + f(d)\right)$
- ◯ Für alle m gilt: $I_m(f) = \sum_{i=0}^m w_i\, f(x_i)$ mit $w_i \geq 0$
- ◯ $I_m(x^k) = \int_c^d x^k\,dx$ für alle $k = 0, \ldots, m$

MC 9. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + y'(t)^2 = t\,y(t) + e^t \quad \text{mit} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1.$$

Wir setzen $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Anfangswertprobleme zu dem obigen Problem äquivalent sind.

- ◯ $z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t)^2 + e^t \end{pmatrix}$ mit $z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t)^2 + e^t \end{pmatrix}$ mit $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $z'(t) = \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t)^2 + e^t \end{pmatrix}$ mit $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $z'(t) = \begin{pmatrix} t\,z_1(t) \\ z_2(t)^2 \\ z_3(t) + z_2(t)^2 \end{pmatrix}$ mit $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

MC 10. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Für steife Probleme ist das implizite Euler–Verfahren besser geeignet als das explizite Euler–Verfahren, weil beim impliziten Verfahren die Konsistenzordnung höher ist
- ◯ Für steife Probleme ist das implizite Euler–Verfahren besser geeignet als das explizite Euler–Verfahren, weil beim impliziten Verfahren die Konvergenzordnung höher ist
- ◯ Das Stabilitätsintervall des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens ist $(-\infty, 0)$
- ◯ Das Stabilitätsintervall der Trapezmethode ist $(-\infty, 0)$

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 20 & -10 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ -1.3 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := DA$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung aller Matrizen (D, P, L, R).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \tag{1}$$

$$\text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das Ausgleichsproblem (1) mittels Householder-Spiegelungen. Gehen Sie dabei **nicht** zu den Normalgleichungen über (sonst 0 Punkte!).

b) Berechnen Sie die Norm des Residuums. Setzen Sie hierzu **nicht** die Lösung aus a) in (1) ein (sonst 0 Punkte!).

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{4}} \\ \dfrac{3}{4\pi} \sin\left(\pi \, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.
Hinweis: Die Funktion $f(y) := -\frac{y}{4\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}$ ist monoton fallend in $[0,1]$.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.9, 0.2)$ zwei Fixpunktiterationen durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.9, 0.2)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 10^{-3}$ anzunähern?

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	1	2
y_i	0	0.7468	0.8821

a) Bestimmen Sie an der Stelle $x = 1.5$ den Wert $p_2(1.5)$ des Interpolationspolynoms zweiten Grades, indem Sie das zugehörige Neville-Aitken-Schema aufstellen. Geben Sie $p_2(1.5)$ explizit an.

b) Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für $p_2(1.5)$ unter der Annahme, dass die Werte zu der Funktion $y(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ gehören, und dass die Nullstellen der vierten Ableitung von $y(x)$ bei $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{1.5}$ angenommen werden.