Diplom – VP **Numerik** 27. August 2007

Multiple-Choice-Test (30 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet. Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort −0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe −2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 10 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 30 Punkten** erreichen.
Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Addition zweier betragsmäßig nahezu gleich großer Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen ist schlecht konditioniert.
- ◯ Die Multiplikation zweier nahezu gleich großer Zahlen ist schlecht konditioniert.
- ◯ Die Auswertung der Funktion $x\,e^x$ ist gut konditioniert für alle x mit $|x| \leq 1$.
- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler aufgrund von Instabilitäten im verwendeten Algorithmus verstärken.

MC 2. Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und $\alpha > 0$. Dann gilt für die relativen Konditionszahlen $\kappa_{\text{rel}}(f, x) := \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$:

- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(\alpha f, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x)$
- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(f + g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) + \kappa_{\text{rel}}(g, x)$
- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(f * g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) * \kappa_{\text{rel}}(g, x)$
- ◯ $\kappa_{\text{rel}}(f/g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x)/\kappa_{\text{rel}}(g, x)$

MC 3. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe (in der betrachteten Matrixnorm) die Konditionszahl $\kappa(A)$. Die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ sei mit einem relativen Fehler ε behaftet. Bei der Berechnung von $x := A^{-1}b$ muss man mit einem relativen Fehler in der folgenden Größenordnung rechnen:

- ◯ $\|A\|\,\varepsilon$
- ◯ $\kappa(A)\,\varepsilon$
- ◯ $\kappa(A^{-1})\,\varepsilon$
- ◯ $\|A^{-1}\|\,\varepsilon$

MC 4. Welche der folgenden Aussagen für Zerlegungen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind korrekt?

- ◯ Ist A invertierbar, so existiert eine LR–Zerlegung mit $A = LR$.
- ◯ A besitzt immer eine QR–Zerlegung.
- ◯ Zur Berechnung der QR-Zerlegung einer dünnbesetzten Matrix ist das Verfahren mittels Givens–Rotationen i.A. effizienter als das Verfahren mittels Householder–Spiegelungen.
- ◯ Ist A symmetrisch positiv definit, so gilt für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n :\ x^T A^{-1} x > 0$.

MC 5. Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ A hat nur positive Eigenwerte.
- ◯ Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.
- ◯ Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.
- ◯ Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $d_{i,i} > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.

MC 6. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Ferner bezeichne $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm, und κ_2 die zugehörige Konditionszahl. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ A^T ist ebenfalls orthogonal.
- ◯ A ist stets symmetrisch.
- ◯ $\|A\,x\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- ◯ $\kappa_2(A) = 1$

MC 7. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit zugehöriger rechter oberer Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Orthogonalmatrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, so dass $A = QR$ gilt. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\det A = \det R$
- ◯ $\|A\|_2 = \|R\|_2$
- ◯ Q und R kann man mit Gauß-Eliminationen und Pivotisierung bestimmen.
- ◯ Q und R kann man mit Householder-Reflektionen bestimmen.

MC 8. Mit $m > n$ sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten und

$$QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Mit $b \in \mathbb{R}^m$ sei ferner x^* die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax-b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\tilde{R}$ ist invertierbar.
- ◯ $A^{-1} = \tilde{R}^{-1}Q$
- ◯ $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$
- ◯ $x^* = \tilde{R}^{-1}Qb$

MC 9. Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n, und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Wegen $\kappa_2(A^TA) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung des Ausgleichsproblems immer ungeeignet.
- ◯ Die Normalgleichungen lassen sich mit dem Cholesky-Verfahren lösen, nicht aber mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung.
- ◯ Mit der Cholesky-Zerlegung $A^TA = LDL^T$ gilt stets $L^Tx^* = D^{-1}y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = A^Tb$ ist.
- ◯ Es gilt stets $\|Ax^* - b\|_2 = \|LDL^Tx^* - A^Tb\|_2$.

MC 10. Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein ist.
- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.
- ◯ Das Fixpunktverfahren lässt sich stets auch als Newton-Verfahren für ein entsprechendes Nullstellenproblem interpretieren.
- ◯ Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.

MC 11. Beim Newton-Verfahren wird oft eine Dämpfungsstrategie benutzt. Diese dient dazu,

- ◯ die Konvergenzordnung des Verfahrens zu verbessern.
- ◯ für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten.
- ◯ die Menge der Startwerte, für die das Verfahren konvergent ist, zu vergrößern.
- ◯ Auslöschungseffekte bei der Berechnung der Korrektur zu dämpfen.

MC 12. x^* sei eine Nullstelle der Funktion $f(x) := \mathrm{e}^{-x} - 2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ f hat eine eindeutige Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}$.
- ◯ Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$.
- ◯ Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert nur für Startwerte x_0, für die $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein ist.
- ◯ Mit $x_0 < x^*$ gilt für die mit der Newton-Methode berechnete Folge $(x_k)_{k\geq 0}$ auch $x_k < x^*$ für alle $k \geq 1$.

MC 13. Seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = [x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f$.
- ◯ $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ ist der führende Koeffizient des Polynoms $P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})$.
- ◯ $[x_i]f = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$.
- ◯ Mit $f(x) := x^5$ gilt $[x_0, \ldots, x_n]f = 1$ für alle $n \geq 5$.

MC 14. Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, und f sei eine beliebig glatte Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit der Newton'schen Interpolationsformel bestimmen.
- ◯ $\max\limits_{x\in[a,b]} \left|f(x) - P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)\right| \leq (b-a) \max\limits_{x\in[a,b]\cup[x_0,x_n]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n x^n$ mit einem geeigneten $\delta_n \in \mathbb{R}$

MC 15. Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \leq x_0 < \ldots < x_m \leq d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen x_j.
- ◯ Bei Gauß-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j von der Funktion f ab.
- ◯ Die Newton-Cotes-Formeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq m+1$ ist.
- ◯ Die Gauß-Quadraturformeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq 2m+1$ ist.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 20 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := DA$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gesucht sind Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2 + 6\,y^2 &= 16 \\ x\,y + x &= 2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie zu dem Startwert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ mittels zweier Schritte des Newton-Verfahrens eine Näherung der zugehörigen Lösung.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Die Funktion $y(t) := \dfrac{1}{t-a} + b\,t$ soll im Sinne minimaler Fehlerquadrate an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0.75	1	2
y_i	2.5	0	-3

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem in Abhängigkeit von a und b ($\|F(x)\|_2 \to \min$) durch Einsetzen aller Messwerte explizit auf.

b) Gegeben seien die Startwerte $a_0 = 0.5$ und $b_0 = -2$. Berechnen Sie mit einem Schritt des Gauß-Newton-Verfahrens a_1 und b_1. Bestimmen Sie zunächst $F'(x_0)$ und $F(x_0)$ und benutzen Sie dann die Normalgleichungen.
Hinweis: $F'(x_0)^T \cdot F'(x_0) = \begin{pmatrix} 272.2 & 16.89 \\ 16.89 & 5.563 \end{pmatrix}$ und $F'(x_0)^T \cdot F(x_0) = \begin{pmatrix} -0.1481 \\ -0.6667 \end{pmatrix}$

c) Bestimmen Sie das Residuum des nichtlinearen Ausgleichsproblems nach dem ersten Schritt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	2	3	4	5
y_i	1	-1	0	2

a) Berechnen Sie die vier fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{l|ccccccc}
x_0 = 2 & 1 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 3 & -1 & \to & -2 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 4 & [\mathbf{x_2}]\mathbf{y} & \to & [\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}]\mathbf{y} & \to & 1.5 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 5 & 2 & \to & [\mathbf{x_2},\mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \to & [\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \to & -\frac{1}{3}
\end{array}$$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_3(x) - y(x)|$ im **Intervall** $[2,5]$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von y gelte $|y^{(3)}(x)| \leq 0.5$, $|y^{(4)}(x)| \leq 2.4$, $|y^{(5)}(x)| \leq 8 \;\forall x \in [2,5]$, und das Knotenpolynom nimmt sein Betragsmaximum an den Stellen $x = \frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$ an.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Das Integral

$$I := \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \quad f(x) := \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

soll numerisch approximiert werden.
Hinweis: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ gilt $|f^{(2)}(x)| \leq 0.09623$, $|f^{(3)}(x)| \leq 0.125$, $|f^{(4)}(x)| \leq 0.1277$, $|f^{(5)}(x)| \leq 0.25$, $|f^{(6)}(x)| \leq 0.4083 \;\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie I näherungsweise mit der Simpsonregel (ein einziger Schritt der Länge $h := 1$) und schätzen Sie den Fehler ab.

b) Bestimmen Sie I näherungsweise mit der summierten Trapezregel mit der Schrittweite $h := \frac{1}{2}$ und schätzen Sie den Fehler ab.

c) Wie klein müsste h bei der summierten Trapezregel gewählt werden, damit der Fehler kleiner als $5\cdot 10^{-5}$ ist?