

## Multiple-Choice-Test

(30 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.

Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort –0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe –2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 15 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 30 Punkten** erreichen.

Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

## Original

**MC 1.** Gegeben sei die Funktion  $f(x, y) := (x^3 - 1) \sin y$ , die an verschiedenen Stellen  $(x, y)$  ausgewertet werden soll. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $f$  ist in der Nähe von  $(0, 0)$  gut konditioniert.
- $f$  ist für alle  $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\}$  gut konditioniert.
- $f$  ist in der Nähe von  $(1, 1)$  gut konditioniert.
- $f$  ist für alle  $(x, y)$  mit  $x < 0$  und  $y \neq i\pi$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  gut konditioniert.

**MC 2.** Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Die Division zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.
- Bei einem stabilen Algorithmus ist die Abweichung im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte Fehler.
- Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen.
- Die Funktion  $f(x, y) := x - y$  ist gut konditioniert für alle  $x < 0, y > 0$ .

**MC 3.** Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Die Nachiteration verbessert eine nicht exakte Lösung  $\tilde{x}$  des Gleichungssystems  $Ax = b$ .
- Mit der Nachiteration lassen sich die Matrizen  $\tilde{L}$  und  $\tilde{R}$  mit  $\tilde{L}\tilde{R} \approx A$  so verbessern, dass  $\|\tilde{L}\tilde{R} - A\|_2$  kleiner wird.
- Die Nachiteration ist nur für symmetrisch positiv definite Matrizen sinnvoll.
- Mittels Nachiteration lassen sich auch Gleichungssysteme  $Ax = b$  mit  $\det(A) = 0$  eindeutig lösen.

**MC 4.** Mit  $k \in \mathbb{N}$  und den Iterationswerten  $x_k \in \mathbb{R}$  gelte  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Die Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert mit mindestens der Ordnung  $p > 1$  gegen  $x^*$ , wenn  $c > 0$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$  existieren, so dass  $|x_{k+1} - x^*| \leq c|x_k - x^*|^p$  für alle  $k \geq k_0$  gilt.
- Die Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert mit mindestens der Ordnung  $p = 1$  gegen  $x^*$ , wenn  $c > 1$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$  existieren, so dass  $|x_{k+1} - x^*| \leq c|x_k - x^*|$  für alle  $k \geq k_0$  gilt.
- Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung  $p > 1$ , wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für  $k \rightarrow \infty$ ) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor  $p$  vergrößert.
- Je größer die Konvergenzordnung  $p$  ist, desto kleiner ist das kleinste  $k \in \mathbb{N}$  mit  $x_k = x^*$ .

**MC 5.** Das Integral  $I(f) := \int_c^d f(x) dx$  soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel  $(d - c) \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$ , mit  $c \leq x_0 < \dots < x_m \leq d$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Ist eine Newton-Cotes-Formel exakt für alle Polynome vom Grade  $\leq n \in \mathbb{N}$ , so ist diejenige Gauß-Formel, die dasselbe  $m$  verwendet, exakt für alle Polynome vom Grade  $\leq 2n - 1$ .
- Sowohl bei Gauß- als auch bei Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte  $c_j$  nicht von der Funktion  $f$  ab.
- Bei unstetigen Integranden  $f$  sind Gauß-Quadraturformeln stets genauer als Newton-Cotes-Formeln, sofern beide dasselbe  $m$  verwenden.
- Es gilt  $I(f) = \frac{d-c}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}t\right) dt$ .

**MC 6.** Es seien  $x_{\min}$  bzw.  $x_{\max}$  die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie  $\text{eps}$  die relative Maschinengenauigkeit in der Menge  $\mathbb{M}(b, m, r, R)$  der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch. Ferner beschreibe  $\text{fl} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$  die Standardrundung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- In  $\mathbb{M}(10, 3, -8, 8)$  gilt  $\left| \frac{\text{fl}(x) - x}{x} \right| = (1 + \varepsilon)x$  mit  $|\varepsilon| \leq 10^{-3} \forall x \neq 0$ .
- In  $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$  gilt  $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-4}$ .
- In  $\mathbb{M}(10, 3, -8, 8)$  gilt  $x_{\min} = 10^{-8}$ .
- In  $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$  gilt  $x_{\max} = 99990000$ .

**MC 7.** Mit  $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  seien  $R$  bzw.  $L$  eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix,  $P$  eine Permutationsmatrix und  $D$  eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Ist  $A$  regulär, so existiert stets eine  $LR$ -Zerlegung mit Permutationsmatrix  $P$ , so dass  $PA = LR$  gilt.
- Ist  $A$  regulär, so existiert stets eine  $LR$ -Zerlegung mit Permutationsmatrix  $P$  und Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $PDA = LR$  gilt.
- Aus  $PDA = LR$  folgt, dass  $A$  genau dann positiv definit ist, wenn alle Diagonalelemente von  $D$  positiv sind.
- Beschreibt die Diagonalmatrix  $D$  eine Zeilenäquilibration, so folgt aus  $B := DA$  die Ungleichung  $\kappa_B \geq \kappa_A$  für die Konditionszahlen von  $A$  und  $B$  bezüglich der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.

**MC 8.** Mit  $A, L, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei  $L$  eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und  $D$  eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Ist  $A$  regulär, so existiert stets eine  $LDL^T$ -Zerlegung mit  $A = LDL^T$ .
- Ist  $A$  positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine  $LDL^T$ -Zerlegung mit  $A = LDL^T$ , wobei alle Diagonalelemente von  $D$  positiv sind.
- Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivottisierung kann man garantieren, dass beim Cholesky-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.
- Nur für positiv definite Matrizen  $A$  kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung  $A = LDL^T$  finden.

**MC 9.** Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Das Gauß-Newton-Verfahren ist stets quadratisch konvergent.
- Beim Gauß-Newton-Verfahren kann es passieren, dass das linearisierte Ausgleichsproblem keine eindeutige Lösung besitzt.
- Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.
- Zum Erreichen einer festen Zielgenauigkeit benötigt das Levenberg-Marquardt-Verfahren stets weniger Iterationsschritte als das Gauß-Newton-Verfahren.

**MC 10.** Mit der stetig differenzierbaren Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und den Iterationswerten  $x^k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , betrachten wir die Iterationsvorschrift  $x^{k+1} := \Phi(x^k)$ . Ferner sei  $E$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^0 \in E$  und  $L \in [0, 1)$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Ist  $\Phi$  selbstabbildend und kontraktiv in  $E$ , so ist  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$  äquivalent zu  $\Phi(x^*) = x^* \in E$ , egal ob  $E$  konvex ist oder nicht.
- Ist die Teilmenge  $E \subset \mathbb{R}^n$  konvex, mit  $\Phi(E) \subset E$  sowie  $\|\Phi'(x)\| \leq L \forall x \in E$  in einer beliebigen Operatornorm, so konvergiert die Folge  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  gegen den eindeutigen Fixpunkt  $x^* \in E$ .
- Ist  $E$  konvex, so ist in einer beliebigen Operatornorm  $\|\Phi'(x)\| \leq L \forall x \in E$  hinreichend für die Kontraktivität von  $\Phi$  in  $E$ .
- $\Phi$  ist kontraktiv in  $E$ , wenn in einer beliebigen Norm gilt  $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\| \forall x, y \in E$ .

**MC 11.** Mit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten wir das Nullstellenproblem  $f(x^*) = 0$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung  $f'$  (Jacobi-Matrix) nicht.
- Falls das Newton-Verfahren für den gewählten Startwert konvergiert, konvergiert das gedämpfte Newton-Verfahren für denselben Startwert auch.
- Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension  $n = 1$ .
- Ist  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  die Iterationsfolge des Sekantenverfahrens mit der Dimension  $n = 1$ , so gilt  $x^* \in [\min\{x_k, x_{k+1}\}, \max\{x_k, x_{k+1}\}]$ .

**MC 12.** Es seien  $m > n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$  und  $x^* \in \mathbb{R}^n$  die Lösung des linearen Ausgleichproblems  $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ . Weiter sei  $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$  der Winkel zwischen  $Ax^*$  und  $b$  sowie  $\tilde{x}$  die Lösung des gestörten Problems  $\|A\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - \tilde{b}\|_2$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\sin \Theta} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- $\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos \Theta} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- $\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \tan \Theta \kappa_2(A) \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- Je größer der Winkel  $\Theta$ , desto schlechter ist das Problem konditioniert.

**MC 13.** Es seien  $m \gg n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Es soll die Lösung  $x^*$  des linearen Ausgleichproblems  $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$  bestimmt werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Der Aufwand bei Lösung mit Normalgleichungen beträgt etwa  $\frac{1}{2}n^3$ .
- Der Aufwand bei Lösung mit Householder-Transformationen beträgt etwa  $mn^2$ .
- Die Lösung mit Normalgleichungen ist stabiler als mit QR-Zerlegung.
- Die Lösung mit Normalgleichungen ist schneller als mit QR-Zerlegung.

**MC 14.** Es sei  $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$  das Interpolationspolynom zu den Daten  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$  mit  $x_0 < \dots < x_n$ , und  $x, x^* \in [x_0, x_n]$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$  kann man an der Stelle  $x^*$  effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.
- $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$  kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.
- $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$  lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.
- Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von  $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x)$  einen Aufwand von  $\mathcal{O}(n^2)$

**MC 15.** Das Integral  $I = \int_a^b f(x) dx$  für eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion  $f$  soll mit Hilfe der Romberg-Quadratur approximiert werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Für die Romberg-Quadratur werden Trapezsummen berechnet.
- Bei der Romberg-Quadratur ist bereits die Genauigkeit (Anzahl signifikanter Ziffern) der ersten Näherungen entscheidend für die erzielbare Genauigkeit.
- Aus Ergebnissen mit unterschiedlicher Stützstellenweite werden genauere Näherungen extrapoliert.
- Die Auswertungen mit niedriger Stützstellenweite werden für spätere Auswertungen nicht mehr benötigt.

**Aufgabe 1**

(6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie eine Zeilenskalierung von  $A$  durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix  $D$  (mit skaliertes Matrix  $B := DA$ ) explizit an.
- Bestimmen Sie die  $LR$ -Zerlegung von  $B$  mit Spaltenpivotisierung, d. h.  $PB = LR$ . Geben Sie die Matrizen  $P$ ,  $L$  und  $R$  explizit an.
- Bestimmen Sie die Determinante von  $A$  mithilfe der durchgeführten  $LR$ -Zerlegung.

**Aufgabe 2**

(6 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^y + \cos x &= 2 + \cos 2 \\ x^2 + 2y^2 &= 6 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen des Newton-Verfahrens für Systeme. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3**

(7 Punkte)

Die Funktion  $y(t) := (t-a)^2 + b t$  soll im Sinne minimaler Fehlerquadrate an folgende Messwerte angepasst werden:

$t_i$	0.5	1	2
$y_i$	1.1	2.1	4.8

- Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem ( $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$ ) in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  durch Einsetzen aller Messwerte explizit auf.
- Gegeben seien die Startwerte  $a_0 = 0.5$  und  $b_0 = 1$ . Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt des Gauß-Newton-Verfahrens?
- Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$  für

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie  $x$  und das Residuum explizit an.**Aufgabe 4**

(5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

$x_i$	-2	-1	0	1
$y_i$	2	-2	1	3

- Berechnen Sie die vier fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{l|l} x_0 = -2 & 2 \\ x_1 = -1 & -2 \quad \searrow \quad -4 \\ x_2 = 0 & 1 \quad \rightarrow \quad [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]\mathbf{y} \quad \searrow \quad 3.5 \\ x_3 = 1 & [\mathbf{x}_3]\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]\mathbf{y} \quad \searrow \quad -\frac{4}{3} \end{array}$$

- b) Stellen Sie das Interpolationspolynom  $p_3(x)$  vom Grad 3 in Newton- oder Horner-artiger Form auf.
- c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler  $|p_3(x) - y(x)|$  im **Intervall**  $[-1, 0]$  an.  
**Hinweis:** Für die Ableitungen von  $y$  gelte  $|y^{(3)}(x)| \leq 2$ ,  $|y^{(4)}(x)| \leq 1.2$ ,  $|y^{(5)}(x)| \leq 4.8 \forall x \in [-2, 1]$ ,  
 und das Knotenpolynom hat Extremstellen bei  $x_{E_{1,2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  und  $x_{E_3} = -\frac{1}{2}$ .

### Aufgabe 5

(6 Punkte)

Das Integral

$$I := \int_{-2}^2 f(x) dx \quad \text{mit} \quad f(x) := e^{-x^2}$$

soll numerisch approximiert werden.

**Hinweis:** Für die Ableitungen des Integranden  $f(x)$  gilt  $f'(x) = -2x e^{-x^2}$ ,  $f''(x) = (4x^2 - 2) e^{-x^2}$ ,  
 $f'''(x) = (12x - 8x^3) e^{-x^2}$ ,  $f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12) e^{-x^2}$ ,

- a) Bestimmen Sie  $I$  näherungsweise mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur

$$I_G(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \approx \int_{-1}^1 f(x) dx .$$

**Hinweis:** Transformieren Sie diese Formel zunächst auf das Intervall  $[-2, 2]$ .

- b) Approximieren Sie  $I$  mit der summierten Trapezregel auf eine gesicherte Genauigkeit von 0.75.  
**Hinweis:** Schätzen Sie  $|f''(x)|$  möglichst gut ab.