

## Multiple-Choice-Test

(30 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.

Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort –0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe –2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 15 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 30 Punkten** erreichen.

Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

**MC 1.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beliebig. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$
- Falls  $A$  invertierbar ist, gilt  $\|AA^{-1}\| = \|A\| \|A^{-1}\|$ .
- $\kappa(A) = 1 \Rightarrow A = I$
- $\kappa(A) = \|A\| \|A^T\|$

**MC 2.** Seien  $\mathbb{M}(b, m, r, R)$  eine Menge von Maschinenzahlen (normalisierte Gleitpunktdarstellung) und  $\text{fl} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$  die zugehörige Reduktionsabbildung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl ist  $x_{\min} = b^{-r-1}$ .
- Für die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl  $x_{\min}$  gilt  $\text{fl}(1 + x_{\min}) = 1$ .
- Die relative Maschinengenauigkeit ist  $\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$ .
- $\text{fl}$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ .

**MC 3.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit relativer Kondition  $\kappa_{\text{rel}}(x)$ . Weiter sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  fest,  $\tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x$  ein gestörtes  $x_0$  und  $\tilde{f}(x)$  eine numerische Näherung an  $f$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0) - f(x_0)|}{|f(x_0)|} \leq \kappa_{\text{rel}}(x_0) |\Delta x|$
- Bei einem stabilen Verfahren zur Berechnung von  $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$  ist  $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0) - f(x_0)|}{|f(x_0)|}$  von der gleichen Größenordnung wie  $\frac{|f(\tilde{x}_0) - f(x_0)|}{|f(x_0)|}$ .
- Der Fehler  $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0) - f(x_0)|}{|f(x_0)|}$  hängt nur von  $\Delta x$  ab.
- $\kappa_{\text{rel}}(x)$  beschreibt in erster Näherung den bei exakter Rechnung zu erwartenden Fehler bei gestörten Daten.

**MC 4.** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär,  $b \in \mathbb{R}^n$  und gesucht sei die Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  von  $Ax = b$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.
- Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.
- Die Ermittlung der Lösung mit Hilfe von Givens-Rotationen ist stabil.
- Das Cholesky-Verfahren ist nur mit Pivotisierung stabil.

**MC 5.** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \gg n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und gesucht sei die Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  zu  $Ax = b$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $x$  läßt sich mit Hilfe der LR-Zerlegung von  $A$  bestimmen.
- Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen ist etwa  $\frac{4}{3}n^3$  Operationen.
- Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen ist etwa  $mn^2$  Operationen.
- Für dünn besetzte Matrizen können Givens-Rotatioen effizienter sein als Householder-Spiegelungen.

**MC 6.** Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $QR = A$  eine Zerlegung von  $A$  mit  $Q$  orthogonal und  $R$  eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$
- $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$
- Zur Lösung von  $Ax = b$  über die QR-Zerlegung muss  $Q$  explizit bestimmt werden.
- $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$

**MC 7.** Das skalare bzw. mehrdimensionale Nullstellenproblem  $f(x) = 0$  soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Bei mehrdimensionalen Problemen erfordert das Newton-Verfahren in jedem Iterationsschritt das Lösen eines linearen Gleichungssystems.
- Während beim Newtonverfahren in jedem Schritt ein neues lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, ändert sich beim vereinfachten Newtonverfahren nur die rechte Seite  $-f(x^k)$ .
- Das vereinfachte Newton-Verfahren trägt seinen Namen, weil es stets ohne die Lösung eines linearen Gleichungssystems auskommt.
- Beim Newton-Verfahren ist  $x^{k+1}$  die Nullstelle der quadratischen Näherung an die Funktion  $f$  im Punkt  $x^k$ .

**MC 8.** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung  $U$  von  $x^*$  und es gelte  $f(x^*) = 0$ . Wir betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von  $x^*$ :

$$x_0 \in U, \quad x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$$

Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Die Newton-Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.
- Die Newton-Methode ist nur lokal quadratisch konvergent, falls man die Berechnung von  $(f'(x_k))^{-1}$  vermeidet.
- Wenn  $f'(x)$  für alle  $x \in U$  regulär ist und das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große  $k$ 's:  $\|x_k - x^*\| \approx \|x_k - x_{k+1}\|$ .
- Die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens kann durch Verwendung orthogonaler Transformationen zur Lösung des auftretenden Gleichungssystems beschleunigt werden.

**MC 9.** Es sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Das Gauß-Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.
- Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.
- Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.
- Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.

**MC 10.** Sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  mit den Stützstellen  $x_0 < \dots < x_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Seien  $l_{jn}$  die Lagrangeschen Fundamentalpolynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom:  

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{jn}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
- $P(f|x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j x^j$  ist ein Polynom vom Grad  $n + 1$  mit  $a_{n+1} \neq 0$ .
- Es existiert genau ein Polynom  $p \in \Pi_n$  mit  $p(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .
- $P(f|x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**MC 11.** Sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  mit den Stützstellen  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $e(x) := f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  der Fehler im Intervall  $I := [\min(a, x), \max(b, x)]$ . Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $e(x_i) = 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ .
- Für  $f \in C^{n+1}(I)$  existiert ein  $\xi \in I$ , so dass  $e(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ .
- Es sei  $[c, d] \not\subseteq I$ . Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle  $x \in [c, d]$  wie folgt abschätzen:  $|e(x)| \leq \max_{z \in [c, d]} \left| \prod_{i=0}^n (z - x_i) \right| \max_{z \in [c, d]} \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}$ .
- Sei  $f(x) = 1/(1+x^2)$ ,  $x \in [-5, 5]$ . Für festes  $n \in \mathbb{N}$  seien die Stützstellen  $x_{j,n} = -5 + 10j/n$ ,  $j = 0, \dots, n$  gegeben. Dann gilt für den Fehler:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)| = 0$ .

**MC 12.**  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  löse das Lagrange-Interpolationsproblem zu den Daten  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit den Stützstellen  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Das Interpolationspolynom soll an einer festen Stelle  $x \in [a, b]$  berechnet werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Der Aufwand für die Berechnung über die Lagrange-Darstellung ist  $\mathcal{O}(n^2)$  Operationen.
- Der Aufwand für die Berechnung über die Newton-Darstellung ist  $\mathcal{O}(n^2)$  Operationen.
- Der Aufwand für die Berechnung über das Neville-Aitken-Schema ist  $\mathcal{O}(n^2)$  Operationen.
- Die Auswertung der Newton-Darstellung kann über ein Horner-artiges Schema durchgeführt werden und erfordert  $\mathcal{O}(n)$  Operationen.

**MC 13.** Sei  $f \in C[a, b]$ . Das Integral  $I(f) := \int_a^b f(x) dx$  werde durch eine Newton-Cotes-Formel  $I_m(f)$  zu Stützstellen  $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$  approximiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- $I_m(f) = \int_a^b P(f|x_0, \dots, x_m) dx$  wobei  $P(f|x_0, \dots, x_m)$  das Interpolationspolynom von  $f$  zu den Stützstellen  $x_0 < \dots < x_m$  ist.
- $I_m(q) = I(q)$  für alle  $q \in \Pi_m$ .
- Falls  $f \in C^{m+1}[a, b]$ , dann gilt für den Fehler  $|I(f) - I_m(f)| \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)|$ .
- Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).

**MC 14.** Sei  $f \in C[a, b]$ . Das Integral  $I(f) := \int_a^b f(x) dx$  werde durch eine Gauss-Formel  $\tilde{I}_m(f) := \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$  approximiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.
- $\tilde{I}_m(q) = I(q)$  für alle  $q \in \Pi_{2m+1}$ .
- Die Gewichte  $\omega_i$  sind alle positiv.
- Falls  $f \in C^{2m+2}[a, b]$ , dann gibt es ein  $c_m$ , so dass für den Fehler gilt:  $|I(f) - \tilde{I}_m(f)| \leq c_m \max_{x \in [a, b]} |f^{(2m+2)}(x)|$ .

**MC 15.** Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- Mittels Extrapolation kann man die Genauigkeit einer Quadraturformel verbessern.
- Mittels Extrapolation kann man die Stabilität einer Quadraturformel erhöhen.
- Zur Konstruktion eines Extrapolationsschemas ist eine asymptotische Fehlerentwicklung des Diskretisierungsfehlers erforderlich.
- Mit dem Romberg-Schema erhöht sich mit jeder weiteren Spalte die Genauigkeit um 2 Potenzen in  $h$ .

**Aufgabe 1**

(5 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 13 - \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Für welche Werte von  $\alpha$  ist  $A$  positiv definit?
- b) Lösen Sie  $Ax = b$  mittels Cholesky-Verfahren für  $\alpha = 0$ . (L-R-Zerlegung / Gauß gibt 0 Punkte!)

**Aufgabe 2**

(8 Punkte)

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 3xy + 5 \\ -2y^2 + 5xy - 4 \end{pmatrix}$$

- a) Fertigen Sie für den 1. Quadranten eine Skizze an, und bestimmen Sie daraus den bestmöglichen ganzzahligen Startwert  $\mathbf{x}_0$ .
- b) Stellen Sie für diesen Startwert das lineare Gleichungssystem für des Newton-Verfahrens zur Bestimmung von  $\mathbf{x}_1$  auf (nicht ausrechnen!).
- c) Zur Bestimmung der Nullstelle im 3. Quadranten wird der Startwert  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (-1, -2)$  gewählt. Dann ist die  $L$ - $R$ -Zerlegung von  $f'(\mathbf{x}_0)$  gegeben durch

$$f'(-1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 10.5 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie damit zwei Schritte des vereinfachten Newton-Verfahrens durch und geben Sie  $\mathbf{x}_2$  explizit an.

**Aufgabe 3**

(6 Punkte)

Gegeben sind die drei Meßwerte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 0 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 2 & 4 & 5 \end{array},$$

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha \frac{1}{2+t} + \beta t$$

gehören.

- a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$  auf. Geben Sie  $A$  und  $b$  explizit an.
- b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem ausnahmsweise mittels der Normalgleichungen. Geben Sie die Lösung  $y(t)$  sowie das Residuum explizit an.

**Aufgabe 4**

(5 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \cos^2(t) dt$$

ist als Tabelle gegeben.

$x_i$	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
$f(x_i)$	0	0.24486	0.46037	0.62437	0.72732	0.77462	0.78528	0.78730

- a) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für  $f(1.1)$  mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung von 3 Tabellenwerten.
- b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.  
**Hinweis:**  $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

### Aufgabe 5

(6 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_0^1 \sin(x^2) dx$$

steht kein geschlossener analytischer Ausdruck zur Verfügung. Wir müssen also auf eine numerische Methode zurückgreifen.

- a) Wieviel Schritte ( $n$ ) braucht man mit der
- summierten Trapezregel (**Hinweis:** Schätzen Sie die entsprechende Ableitung ab, ohne die Extrema zu bestimmen.),
  - summierten Simpsonregel (**Hinweis:** Für  $f(x) = \sin(x^2)$  gilt  $\max_{\xi \in [0,1]} |f^{(4)}(\xi)| < 30$ ),
- um eine Genauigkeit von  $\epsilon = 10^{-3}$  zu erreichen?
- b) Führen Sie die Berechnung gemäß a)(ii) durch.