Multiple-Choice-Test (24 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.

Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort -0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe -2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 12 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 24 Punkten** erreichen.

Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1. Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Householder-Reflektionen ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.
- ◯ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$
- ◯ $\kappa_2(A) > 0$
- ◯ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A^{-1}) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$

MC 2. Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Rechenaufwand beim Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen beträgt jeweils $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- ◯ Skalierung/Äquilibrierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ◯ Pivotisierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ◯ Die Nachiteration verbessert die Kondition des Problems.

MC 3. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\|A\,x - b\|_2 \to \min$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $||A||_2 = ||QA||_2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$
- ◯ $||Ax - b||_2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$.
- ◯ Für reguläre Matrizen A gilt im Allgemeinen: $\kappa_2(A^TA) \approx 2\kappa_2(A)$.
- ◯ Es existiert stets ein eindeutiges $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $A^TAx^* = A^Tb$.

MC 4. Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right|$.
- ◯ Für $|x - 1| \ll 1$ ist $f(x)$ gut konditioniert.
- ◯ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{x}\right|$.
- ◯ Für $x \to \infty$ ist $f(x)$ gut konditioniert.

MC 5. Sei $f(x,y) = x \bigtriangledown y$, $x,y \in \mathbb{R}$, $\bigtriangledown \in \{+,-,\times,\text{div}\}$ und κ_{rel} die relative Konditionszahl von f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

◯ Für die Multiplikation und die Division ist $\kappa_{rel} \leq 1$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$.

◯ Für die Addition und die Subtraktion ist $\kappa_{rel} \gg 1$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$.

◯ Bei der Addition und der Subtraktion kann eine sehr große relative Fehlerverstärkung auftreten.

◯ Die relativen Rundungsfehler bei den elementaren Gleitpunktoperationen $\circledtriangledown$ sind betragsmäßig kleiner als die Maschinengenauigkeit.

MC 6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0,\ldots,x_n)$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

◯ Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a,b]$.

◯ Die Wahl der Stützstellen hat keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler.

◯ Falls $f \in C^{n+1}([a,b])$, dann hängt der Interpolationsfehler im Intervall $[a,b]$ von dem Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ und dem Maximum von $|f^{(n+1)}(x)|$ in $[a,b]$ ab.

◯ Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.

MC 7. Sei $[x_0,\ldots,x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ von der Funktion f zu den Stützstellen $x_0,\ldots,x_n$. Ferner sei $a := \min_{0\leq i\leq n} x_i$ und $b := \max_{0\leq i\leq n} x_i$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

◯ Die dividierte Differenz hängt von der Reihenfolge der Stützstellen ab.

◯ Falls $f \in C^n([a,b])$, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $[x_0,\ldots,x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n!$.

◯ Für die Newtonsche Interpolationsformel gilt:

$$p(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \sum_{i=0}^{n}[x_0,\ldots,x_i]f \prod_{j=0}^{i}(x-x_j)$$

.

◯ Falls die Stützstellen paarweise verschieden sind, dann gilt:
$[x_0,\ldots,x_n]f = ([x_1,\ldots,x_n]f - [x_0,\ldots,x_{n-1}]f)/(x_n - x_0)$.

MC 8. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + 2\,y''(t) - y'(t)\,y^2(t) = \sin(t) \text{ mit } y(1)=1,\ y'(1)=2,\ y''(1)=-1.$$

Ferner sei $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Anfangswertprobleme zu dem obigen Problem äquivalent sind.

◯ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(0) = (1,2,-1)^T$.

◯ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1,2,-1)^T$.

◯ $z'(t) = (z_1(t), z_2(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1,2,-1)^T$.

◯ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (2,-1,4)^T$.

MC 9. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von f.
- ◯ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$.
- ◯ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.
- ◯ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.

MC 10. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ◯ Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.

MC 11. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\Phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.
- ◯ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von Φ bestimmen.
- ◯ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von Φ bestimmen.
- ◯ Wenn $\|F(x^\star)\|_2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.

MC 12. Seien $f \in C[a, b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ das Integral von f auf $[a, b]$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i \, f(x_i)$ eine Quadraturformel. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die absolute Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ◯ Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ◯ Falls die Quadraturformel exakt ist vom Grad n, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.
- ◯ Die Gewichte ω_i einer Quadraturformel sind immer positiv.

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 3 & \beta & 0 \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A für beliebige Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Pivotisieren Sie – wenn möglich – so, dass die Parameter nie *Pivotelemente* sind.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der LR-Zerlegung die Determinante von A.

c) Geben Sie für $\alpha = 1, \beta = 2$ und $\gamma = 3$ die Menge der Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von δ an.

Aufgabe 2 (9 Punkte)
Gegeben seien Meßwerte

t_i	1	2	3	4
f_i	4	5	6	8

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = \frac{1}{t - \alpha} + \beta\, t$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (was ist x?, Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $\alpha_0 = 0.5$, $\beta_0 = 2$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Nach zwei Iterationen erhält man $\alpha_2 = 0.52323$ und $\beta_2 = 1.9396$. Berechnen Sie zu diesen Parameterwerten das Residuum.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \\ 0 & 14 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformationen. Geben Sie x und das Residuum explizit an.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Gesucht ist eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \ln(1 + x_2) - 2x_1 &= 0 \\ \sin x_1 \cos x_2 - 4x_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

in $D = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

a) Leiten Sie eine Fixpunktiteration her, und zeigen Sie, dass diese den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.

b) Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (0, 0)^T$ zwei Iterationsschritte durch und geben Sie eine möglichst genaue Fehlerabschätzung an.

c) Wieviele Iterationsschritte sind höchstens notwendig, um in der Maximumnorm eine Genauigkeit von 10^{-2} zu erreichen?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	3	5
y_i	3	0	1	-2

a) Berechnen Sie die fünf fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 = 0 & 3 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 2 & [\mathbf{x_1}]\mathbf{y} & \rightarrow & -\frac{3}{2} & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 3 & 1 & \rightarrow & [\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}]\mathbf{y} & \rightarrow & [\mathbf{x_0},\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}]\mathbf{y} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 5 & -2 & \rightarrow & [\mathbf{x_2},\mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \rightarrow & -\frac{5}{6} & \rightarrow & [\mathbf{x_0},\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x_3}]\mathbf{y}
\end{array}
$$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 in Newton oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine Abschätzung für dem maximalen Fehler $|p_3(x) - y(x)|$ im **Intervall** $[2, 3]$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von y gelte $|y^{(3)}(x)| \leq 2.5$, $|y^{(4)}(x)| \leq 5$, $|y^{(5)}(x)| \leq 9$ $\forall x \in [0, 5]$.
Das Knotenpolynom hat Extremstellen bei $x_{E_{1,2}} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$ und $x_{E_3} = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Das Integral

$$
I = \int_{-2}^{2} f(x)dx \qquad \text{mit} \quad f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}
$$

soll mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und anschließender Romberg-Extrapolation zur Schrittweitenfolge $h_i := 4 \cdot 2^{-i}, i = 0, 1, 2, 3$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie die Werte $T_{2,0}$, $T_{3,2}$ und $T_{4,4}$, die im folgenden Romberg-Extrapolationsschema fehlen. (unterhalb der Aufgabenstellung)

$$
\begin{array}{lccccccccc}
T(h_0) = T_{0,0} = 0.001341851 & & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & & \\
T(h_1) = T_{1,0} = 2.000671 & \rightarrow & 2.667114 & & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & & \\
T(h_2) = T_{2,0} = \boxed{\;\ldots\;} & \rightarrow & 1.027784 & \rightarrow & 0.9184953 & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \\
T(h_3) = T_{3,0} = 1.253143 & \rightarrow & 1.247189 & \rightarrow & \boxed{T_{3,2}} & \rightarrow & 1.267266 & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
T(h_4) = T_{4,0} = 1.253208 & \rightarrow & 1.253230 & \rightarrow & 1.253633 & \rightarrow & 1.253503 & \rightarrow & \boxed{T_{4,4}} &
\end{array}
$$

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $T(h_4)$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ gilt $f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x^2}$, $f''(x) = (16x^2-4)\mathrm{e}^{-2x^2}$, $f'''(x) = (48x - 64x^3)\mathrm{e}^{-2x^2}$, $f^{(4)}(x) = (48 - 384x^2 + 256x^4)\mathrm{e}^{-2x^2}$.

c) Schätzen Sie den Fehler von T_{44}.