Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau F11

IGPM RWTH–Aachen **NumaMB F11**

Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte. **Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!**

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -1, 4)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.1$.	
2.	In $\mathbb{M}(10, 3, -3, 3)$ gilt: $x_{\text{MAX}} = 999$.	
3.	Es gilt $\left\lvert \frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x} \right\rvert \le$ eps für alle $x \in \mathbb{D}$.	
4.	Die Zahl 128 ist in $\mathbb{M}(2, 8, -8, 8)$ exakt darstellbar.	

VF-2:

1.	Die Funktion $f(x_1, x_2) := \cos(x_1)e^{x_2}$ ist in der Nähe von $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}\pi, 1)$ schlecht konditioniert.	
2.	Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Rundungsfehler im verwendeten Algorithmus zur Auswertung der Funktion verstärken.	
3.	Die Funktion $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ist gut konditioniert für alle $x > 0,\ y < 0$.	
4.	$\times$ und $+$ sind Operationen, die für alle Eingangsdaten ungleich Null gut konditioniert sind.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär.

1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Es gilt $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$.	
2.	Sei A symmetrisch. Dann gilt $\|A\|_\infty = \|A\|_1$.	
3.	Sei D_z die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch $d_i = \left(\sum_{j=1}^n \lvert a_{ij} \rvert\right)^{-1}$. Für die Skalierung mit D_z gilt: $\kappa_\infty(D_z\, A) \le \kappa_\infty(D\, A)$ für jede reguläre Diagonalmatrix D.	
4.	Zu A existiert eine Zerlegung $A = LR$, mit einer normierten unteren Dreiecksmatrix L und einer oberen Dreiecksmatrix R .	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Bei Störung der Eingabedaten A und b ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	
2.	Sei A zusätzlich symmetrisch positiv definit. Für die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ gilt dann: $\det(L) = 1$ und $\det(D) > 0$.	
3.	Der Rechenaufwand der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung zur Bestimmung der Lösung x ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung von x und $\tilde{r} := b - A\tilde{x}$. Dann gilt: $\|\tilde{x} - x\| \le \|A^{-1}\|\, \|\tilde{r}\|$.	

VF-5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.		
1.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer QR-Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur QR-Zerlegung von A lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.	
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	

VF-6: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m > n$, $Rang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems.		
1.	Die Lösung $x^\star$ ist eindeutig.	
2.	Die Matrix AA^T ist symmetrisch positiv definit.	
3.	Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems mittels Givens-Rotationen und Householder-Spiegelungen liefert dasselbe Residuum $\|Ax^\star - b\|_2$.	
4.	Der Vektor $Ax^\star - b$ steht senkrecht auf b.	

VF-7:		
1.	Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
2.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
3.	Fixpunktverfahren konvergieren immer für Startwerte aus einer hinreichend kleinen Umgebung des Fixpunktes.	
4.	Die Konvergenzordnung einer Fixpunktiteration ist immer maximal 1.	

VF-8: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\|\|.\|\|$ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt.		
1.	Für alle $x_0 \in D$ konvergiert die Folge $\{x\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt $x^\star$.	
2.	Es existiert nur ein Fixpunkt in $\mathbb{R}^2$.	
3.	Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\|\|\Phi'(x)\|\| \leq 1$.	
4.	Seien $x_0 \in D$ und $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ für $k \geq 0$. Dann gilt: $\|x_3 - x_2\| \leq L^2 \|x_1 - x_0\|$.	

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$.		
1.	Es gilt: $\nabla\phi(x^\star) = 0$.	
2.	Die Lösung $x^\star$ ist eindeutig.	
3.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Minimums.	
4.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	

VF-10: Es sei $\Phi(x) = e^{-x^2}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$.		
1.	Es existiert eine eindeutige Lösung $x^\star$.	
2.	Es sei $x_0 \in [0, 2]$ gegeben. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \geq 0$, hat die Konvergenzordnung 1.	
3.	Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \geq 0$ ist global konvergent.	
4.	Sei $x_0 > 1$ gegeben und $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \geq 0$. Dann gilt: $x_{k+1} \leq x_k$ für alle $k \geq 0$.	

VF-11: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
2.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n!\, \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
3.	$[x_0, x_1]\, f = f(x_1) - f(x_0)$.	
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \ldots, x_n]\, f = 2$ für alle $n \geq 4$.	

VF-12: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^{m} \omega_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
1.	Bei Gauß-Quadraturformeln hängen die Gewichte ω_j von der Funktion f ab.	
2.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms zu f mit äquidistanten Stützstellen.	
3.	Sei $m = 2$. Die Newton-Cotes-Formel hat dann Gewichte $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{3}$.	
4.	Bei der Gauß-Quadratur gilt: $I(p) = Q_m(p)$ für alle Polynome p vom Grade $\leq 2m + 1$.	

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -90 \\ -22 & 0 & 28 \\ 88 & -11 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -10.5 \\ -3.8 \\ 28.7 \end{pmatrix}.$$

a) Jede Komponente von b sei mit einem relativen Messfehler von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ behaftet; die Matrix A sei ungestört. Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) müssen Sie rechnen?

Hinweis: $\|A^{-1}\|_\infty \approx 13.702$.

b) Lösen Sie $A\,x = b$ mittels Gaußelimination **mit** Skalierung (Zeilenäquilibrierung) und **mit** Spaltenpivotisierung.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) + \left(x - \frac{3}{5}\right)^2\right) \\ \frac{1}{8}\left(e^y\, e^{-x} + \ln(y+1)\right) \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: In $[0,2] \times [0,1]$ hat F genau einen Fixpunkt.

b) Wieviele Iterationen sind, ausgehend vom Startwert $(0.2, 0.2)^T$, mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um bezüglich der 1-Norm eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen?

c) Geben Sie für die zweite Iterierte der Fixpunktiteration mit dem Startwert aus b) eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte y_i

t_i	1	2	3
y_i	4	2	1

.

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$y(t) = C\,e^{-\lambda t}$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter C und λ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(C_0,\, \lambda_0) = (5\,,\ 0.5)$ einen Gauss-Newton-Schritt aus und berechnen Sie anschließend das zugehörige Residuum.
Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(t)\,dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x_i	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x_i)$	0.52112	0.61625	0.71472	0.81459	0.91389	1.0106

Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.55)$ mittels einer Newton-Interpolation vom Grad 3. Werten Sie das Polynom hornerartig aus. Geben Sie für den Näherungswert eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.
Hinweis: $\sin(x)\,\cos(x) = \frac{1}{2}\,\sin(2\,x)$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_{-3.5}^{-1.5} e^{-\frac{t^2}{3}}\,dt.$$

Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel zum obigen Integral eine Näherung, die vom exakten Integral um höchstens 0.015 abweicht.