Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1:		
1.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	
3.	Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für alle x mit $\lvert x - 1\rvert \ll 1$.	
4.	Die Funktion $f(x, y) = x\, e^{4\, y^2}$ ist gut konditioniert für alle (x, y) mit $x^2 + y^2 \leq 0.1$.	

VF-2:		
1.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi\, 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $(x + y)(x - y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf.	
2.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi\, 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $\sin(x) - \sin(y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf.	
3.	Die Funktion $f(x, y) = x + y$ ist für alle (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gut konditioniert.	
4.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Dann gilt $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)^{-1}$.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\, x = b$.		
1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Liegt nur eine Störung der Eingabedaten b vor, so ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	
2.	Zeilenäquilibrierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	
3.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung $A = L\, R$ von A.	
4.	Es existiert immer eine QR-Zerlegung $A = Q\, R$ von A.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix und $A = L\, D\, L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.		
1.	Es gilt: $\det(A) > 0$.	
2.	Es gilt: $\det(A) = \det(D)$.	
3.	Der Rechenaufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	

VF-5: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $G_1,\dots,G_k$ Givens-Rotationen, so dass $G_k \dots G_2\, G_1\, A = R$ mit einer oberen Dreiecksmatrix R.

1.	Die Produktmatrix $G_k \dots G_1$ ist immer orthogonal.	
2.	Die Produktmatrix $G_k \dots G_1$ ist immer symmetrisch.	
3.	Es gilt: $A = Q\,R$, mit $Q = G_1^T \dots G_k^T$.	
4.	Es seien zusätzlich $m = n$ und A regulär. Dann gilt: $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \le m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.

1.	Der Vektor $A\,x^\star$ steht senkrecht auf b.	
2.	$\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Es gilt: $x^* = R^{-1}\,Q\,b$.	
4.	Die Matrix R kann man über die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T\,A$ bestimmen.	

VF-7: Es seien $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0,1,2,\dots$ definiert.

1.	Falls $\lvert\Phi'(x^\star)\rvert < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $\lvert x_0 - x^\star\rvert$ hinreichend klein.	
2.	Falls $\lvert\Phi'(x^\star)\rvert > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \ne x^\star$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$.	
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.	
4.	Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $\lvert x_0 - x^\star\rvert$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	

VF-8: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \ne -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0,1,2,\dots$ definiert.

1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.	
3.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ erfüllt.	
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > 0$.	

VF-9: Es sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} - 2$. Weiter seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_k)_{k\geq 1}$ die mit der Newton-Methode berechnete Folge.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^*.	
2.	Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.	
3.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert nur für Startwerte x_0, für die $\lvert x_0 - x^*\rvert$ hinreichend klein ist.	
4.	Es gilt $x_k - x^* \approx x_k - x_{k+1}$ für k hinreichend groß.	

VF-10: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\lVert F(x^\star)\rVert_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \lVert F(x)\rVert_2$.		
1.	Die Gauß-Newton-Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung einer Lösung $x^\star$.	
2.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	
3.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel 1.	
4.	Um Konvergenz des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu gewährleisten, muss der in diesem Verfahren verwendete Parameter μ hinreichend groß gewählt werden.	

VF-11: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\rvert$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	
3.	Falls die Funktion f ein Polynom vom Grad maximal n ist, dann gilt: $f(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
4.	Es seien $x_0, \ldots, x_n$ äquidistant auf $[a, b]$ und $f \in C^\infty([a, b])$ beliebig. Dann gilt für jedes $x \in [a, b]$ dass $\lim_{n\to\infty} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\rvert = 0$.	

VF-12: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
1.	Bei derselben Anzahl an Stützstellen ist der absolute Fehler bei der Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei der entsprechenden Newton-Cotes-Formel.	
2.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Fehler minimal wird.	
3.	Es sei $m = 2$. Für die Newton-Cotes-Formel $I_2(f)$ gilt $I_2(x^4) = I(x^4)$.	
4.	Es sei $f \in C^4([a, b])$ und $t_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$. Bei der summierten Simpson-Regel $S(h) = \frac{h}{6}\sum_{j=1}^n \Big(f(t_{j-1}) + 4f(\frac{t_{j-1}+t_j}{2}) + f(t_j)\Big)$ gilt: $I(f) - S(h) = \mathcal{O}(h^4)$.	

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := D\,A$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $P\,B = L\,R$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ für $b = (8,\ 12,\ 4)^T$ unter Verwendung der in a) und b) bestimmten Zerlegung von A.
Achtung! Alle anderen Wege geben **0 Punkte**!

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben seien Messwerte

t_i	0	-2	2	1
f_i	-6.8	3.1	-0.8	-6.1

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = \alpha\,(t^2 - 4) + \beta\,(t - 1)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf, und geben Sie A, x und b explizit an!.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Householder-Transformationen. Geben Sie die Lösung $f(t)$ und das Residuum explizit an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{4} - y &= 9 \\ -x + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 4. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Für die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x \sin(2\,t)\;dt$$

ist eine Wertetabelle gegeben.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
$F(x)$	0.0	0.061209	0.22985	0.46463	0.70807	0.90057	0.99500

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.6)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Verwendung von vier Stützstellen. Geben Sie den berechneten Näherungswert explizit an und begründen Sie die Wahl der Stützstellen.

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil a) berechneten Näherungswert an, **ohne** den *exakten* Integralwert zu verwenden.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$\int_{-1}^{1} 5\,\cos x - x\,e^x dx$$

a) Bestimmen Sie für die summierte Simpson-Regel eine geeignete Schrittweite h so, dass der Quadraturfehler unter der Schranke $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ bleibt. Schätzen Sie dazu die Beträge der einzelnen Summanden der entsprechenden Ableitung einzeln ab.

b) Führen Sie die Berechnung der Simpson-Regel für die in a) gefundene Schrittweite h durch.