Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)
Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte. **Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!**

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -1, 4)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.01$.	
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\|\epsilon\| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x(1 + \epsilon)$.	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\|\epsilon\| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.	
4.	Die Zahl 68.25 ist in $\mathbb{M}(2, 9, -8, 8)$ exakt darstellbar.	

VF-2:		
1.	Die Multiplikation zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.	
2.	Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur Lösung dieses Problems.	
3.	Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für alle $x > 3$.	
4.	Die Funktion $f(x, y) = x(3y^2 + 2)$ ist in der Nähe von $(0, 0)$ gut konditioniert.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	
2.	Zeilenäquilibrierung verbessert die Kondition der Matrix A bezüglich der 2-Norm.	
3.	Es sei $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung von A. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	
4.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann mit dem Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung stabil berechnet werden.	

VF-4: Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation.		
1.	Die Householder-Transformation lässt sich geometrisch als Spiegelung interpretieren.	
2.	Es gilt: $\det(Q_v) = 1$.	
3.	Q_v ist immer symmetrisch.	
4.	Es gilt: $Q_v v = -v$.	

VF-5: Es seien $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix und $A = Q\,R$.

1.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm ist.	
2.	Es gilt $A^{-1} = R^{-1}Q$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Zerlegung $A = Q\,R$ der Matrix A über Householder-Transformationen ist etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Die Zerlegung $A = Q\,R$ der Matrix A sei berechnet über Givens-Transformationen. Dann gilt $Q^{-1} = Q$.	

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt.

1.	Es sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Dann gilt: $x^\star$ erfüllt $A^T A\,x^\star = b$.	
2.	$\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Die Matrix R kann man über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
4.	Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit.	

VF-7: Sei $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ ein Fixpunktverfahren zur Bestimmung eines Fixpunktes $x^\star = \Phi(x^\star)$.

1.	Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
2.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
3.	Fixpunktverfahren konvergieren immer für Startwerte aus einer hinreichend kleinen Umgebung des Fixpunktes.	
4.	Sei $\|\Phi'(x^\star)\| < 1$. Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist maximal 1.	

VF-8: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2}\sin(x)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

1.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 0]$ erfüllt.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.	
3.	Das Problem $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung.	
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.	

VF-9: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und für $x^\star$ gelte $f(x^\star) = 0$. Wir betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von $x^\star$: $\big(x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k)\big)$

1.	Bei der praktischen Durchführung der Methode soll die Berechnung von $(f'(x_k))^{-1}$ vermieden werden.	
2.	Beim vereinfachten Newton-Verfahren ist die Konvergenz im allgemeinen langsamer als bei der Newton-Methode.	
3.	x_{k+1} ist die Nullstelle der linearen Taylor-Annäherung von f an der Stelle x_k.	
4.	Es sei U eine Umgebung von $x^\star$ mit $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Weiter sei $x_0 \in U$ so, dass die Folge x_k, $k = 0, 1, \ldots$, in U gegen $x^\star$ konvergiert. Dann gilt $\|x_k - x^\star\| \approx \|x_k - x_{k+1}\|^2$.	

VF-10: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	In jeder Iteration der Gauß-Newton-Methode ergibt sich ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	
2.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.	
3.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode ist in der Regel 1.	
4.	Die Gauß-Newton-Methode konvergiert wenn der Startwert x_0 so gewählt ist, daß $\|x_0 - x^\star\|$ hinreichend klein ist.	

VF-11: Es sei $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \,|\, x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle x.	
2.	Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} \lvert P(f \,\vert\, x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\rvert$ hängt von der Wahl der Stützstellen x_i ab.	
3.	Es gilt: $\delta_n = \frac{[x_1, \ldots, x_n]\, f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]\, f}{x_n - x_0}$	
4.	Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} \lvert P(f \,\vert\, x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\rvert$ wird für hinreichend großes n beliebig klein.	

VF-12: Es sei f auf dem Intervall $[a, b]$ hinreichend oft stetig differenzierbar. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Newton-Cotes-Quadraturformel $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Newton-Cotes-Formel.

1.	Es gilt $w_j \geq 0$ für alle j.	
2.	Für $m = 2$ gilt: $I_2(f) = I(f)$ für alle $f \in \Pi_3$.	
3.	Es gilt: der Exaktheitsgrad von $I_m^n(f)$ ist größer als der von $I_m(f)$.	
4.	Der Fehler $\lvert I_m^n(f) - I(f)\rvert$ wird für hinreichend große n beliebig klein.	

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4.008 \\ 2 & 1 & -1.004 \\ 1 & 1 & 6.008 \end{pmatrix}$$

a) Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. $\|x\|_\infty$) muss gerechnet werden, wenn zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, anstelle der Matrix A die gestörte Matrix $\tilde{A}$ verwendet wird? Der Vektor b sei weiterhin ungestört.

Hinweis: $\left\|A^{-1}\right\|_\infty = 3.875$

In den folgenden Aufgabenteilen soll das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gaußelimination mit **Skalierung** (Zeilenäquilibrierung) und **Spaltenpivotisierung** gelöst werden. Führen Sie dazu folgende Schritte durch:

b) Formen Sie das System, inkl. der rechten Seite b (nach der Skalierung), auf obere Dreiecksgestalt um.

c) Berechnen Sie die Lösung x des Systems aus Aufgabenteil b) durch Rückwärtseinsetzen in **2-stelliger Gleitpunktarithmetik** (GPA). Hinweis: Runden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil b) zunächst entsprechend.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Die Funktion $y(t) := \dfrac{4\,\sin(\alpha\,\pi\,t)\,\cos(\beta\,\pi\,t)}{\pi}$ soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0.25	0.5	1.0	1.5
y_i	0.9	0.35	0.85	0.16

Bestimmen Sie die Parameter α und β näherungsweise.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(\alpha_0, \beta_0) = (1, 1)$ einen Gauss-Newton-Schritt aus. Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels **Givens-Rotationen**. Geben Sie $y(t)$ explizit an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - 2\,x - y &= 4 \\ y^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} &= \frac{33}{4} \end{aligned}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 2. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \int_1^x \ln(t)\, dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x_i	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x_i)$	0.041074	0.071061	0.1082	0.15201	0.20207	0.25802

Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.52)$ mittels einer Newton-Interpolation vom Grad 3. Begründen Sie die Wahl der Stützstellen. Werten Sie das Polynom hornerartig aus. Geben Sie für den Näherungswert eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I(f) = \int_{1.5}^{2.5} f(x)\, dx \quad \text{mit} \quad f(x) := \ln(1 + \cos x)\,.$$

a) Bestimmen Sie für die summierte Simpson-Regel eine geeignete Schrittweite h so, dass der Quadraturfehler unter der Schranke $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ bleibt.

   Hinweis: Für die Ableitungen von f gilt $f'(x) = -\sin(x)/(1+\cos x)$, $f''(x) = -1/(1+\cos x)$, $f'''(x) = -\sin(x)/(1+\cos x)^2$, $f^{(4)}(x) = (\cos x - 2)/(1+\cos x)^2$, $f^{(5)}(x) = (\cos(x) - 5)\sin(x)/(1+\cos x)^3$.

b) Führen Sie die Berechnung der summierten Simpson-Regel mit der in a) gefundenen Schrittweite durch.