

Verständnisfragen-Teil

(24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.	
1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -2, 4)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.001$.
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $ \epsilon \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.
3.	Es gilt $\left \frac{\text{fl}(x) - x}{x} \right \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.
4.	Die Zahl 256 ist in $\mathbb{M}(2, 4, -6, 6)$ exakt darstellbar.

VF-2:	
1.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y e^{x^2}$. Für $x = 1$ und $y \neq 0$ hat die relative Konditionszahl den Wert $\kappa_{\text{rel}} = 2$.
2.	Die Funktion $f(x, y) = x - y$ ist für alle (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gut konditioniert.
3.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.
4.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es stabile Algorithmen zur Lösung des Problems.

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig, aber regulär.	
1.	Ohne Pivotisierung ist Gauß-Elimination für A nicht immer durchführbar.
2.	Zeilenäquilibrierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.
3.	Betrachte $Ax = b$ und sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A . Liegt nur eine Störung der Eingabedaten b vor, so ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.
4.	Es sei $A = QR$ mit einer orthogonalen Matrix Q . Dann gilt: $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.

VF-4: Mit $A, L, R, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix, R eine rechte obere Dreiecksmatrix, D eine Diagonalmatrix und A symmetrisch positiv definit.	
1.	Es existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.
2.	Es existiert eine Zerlegung $A = LR$.
3.	Der Rechenaufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen (Operationen gem. Vorlesung).
4.	Die Gauß-Elimination ohne Pivotisierung ist für die Matrix A immer durchführbar.

VF-5: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $A = QR$ eine QR -Zerlegung von A .	
1.	Es seien $m = n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$.
2.	Die QR -Zerlegung von A kann mittels Householder Transformationen auch ohne Pivotisierung stabil bestimmt werden.
3.	Es sei $m = n$. Dann gilt: $\det A = \det R$.
4.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R$ gilt.	
1.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$.
2.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Qb\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
3.	Ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$, so gilt: $x^* = R^{-1}Qb$.
4.	Die Matrix R kann man über die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T A$ bestimmen.

VF-7: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2 \cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.	
1.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.
2.	Für die Teilmenge $E := [0, 1]$ sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
3.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.
4.	Die Fixpunktiteration hat die Konvergenzordnung 2.

VF-8: Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Wir nehmen an, dass $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$, und betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^* :	
$x_0 \in U, \quad x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$	
1.	Die Newton-Methode ist lokal quadratisch konvergent.
2.	Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große Werte von k : $\ x_k - x^*\ \approx \ x_k - x_{k+1}\ $.
3.	Beim Newtonverfahren kann eine Dämpfungsstrategie benutzt werden, die dazu dient für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten.
4.	Beim Newtonverfahren kann eine Dämpfungsstrategie benutzt werden, die dazu dient Auslöschungseffekte bei der Berechnung der Korrektur zu vermeiden.

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	Die Gauß-Newton-Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung einer Lösung x^* .	
2.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, so ist die Konvergenzordnung in der Regel 1.	
3.	Beim Gauß-Newton-Verfahren hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	
4.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	

VF-10: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n , das die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert.

1.	Das Polynom $P(f x_0, \dots, x_n)$ ist eindeutig.	
2.	Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Polynoms $P(f x_0, \dots, x_n)$.	
3.	Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n , so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.	
4.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	

VF-11: Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden. Es sei $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ die Newton-Cotes-Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Newton-Cotes-Formel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, mit $t_j := a + jh$, $j = 0, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

1.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
2.	Es gilt $ I_1^n(f) - I(f) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.	
3.	Bei der summierten Simpson-Regel $I_2^n(f)$ gilt $I(f) - I_2^n(f) = \mathcal{O}(h^4)$.	
4.	Der Exaktheitsgrad von $I_{m+1}(f)$ ist stets größer als der von $I_m(f)$.	

VF-12: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch durch eine Gauß-Quadraturformel $G_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m \omega_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ approximiert werden.

1.	Die Gewicht ω_j können für große m auch negativ werden.	
2.	Es sei $m = 1$. Die Gauß-Quadratur hat dann die Gewichte $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$.	
3.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	
4.	$G_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1.5 & 1.5 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skaliertem Matrix $B := DA$) explizit an.
- Bestimmen Sie die LR -Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P , L und R explizit an.
- Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A . Verwenden Sie hierzu die LR -Zerlegung aus den vorherigen Aufgabenteilen. (Achtung: Andere Lösungswege werden mit 0 Punkten bewertet.)

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Gegeben seien Messwerte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline f_i & -0.8 & 0.8 & 1 \end{array},$$

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = a \sin(bt)$$

gehören.

- Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$ explizit auf (Messwerte schon einsetzen!).
- Für das Gauß-Newton-Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? Geben Sie ihr Ergebnis mit **numerischen** Werten an. Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.
- Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformationen. Geben Sie die Lösung x und das Residuum explizit an.**Aufgabe 3**

(9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3yx - 3x - 1 \\ x + y^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

- Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen mit $x > -1$ hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).
- Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 4. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Für eine Funktion f kennt man die Wertetabelle

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
f_i	1	0.25	1	2.25	4	7	4

sowie folgende Abschätzungen für die Ableitungen: $|f^{(i)}(x)| \leq |(i+1)(x^2 - 2x)|$, $i \in \mathbb{N}$.

- Berechnen Sie mit dem Neville-Aitken-Schema einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.25)$ indem Sie ein Polynom dritten Grades zugrunde legen. Geben Sie den berechneten Näherungswert explizit an, und begründen Sie die Wahl der Stützstellen.
- Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil a) berechneten Näherungswert an.

Aufgabe 5

(7 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) - y'(t) + t y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Berechnen Sie mit dem verbesserten Euler-Verfahren und der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ jeweils eine Approximation von $y(1)$ und $y'(1)$.