**Verständnisfragen-Teil** (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Bewertung: Vier Fragen richtig beantwortet ergibt 2 Punkte. Drei Fragen richtig beantwortet und die 4. nicht beantwortet ergibt 1.5 Punkte. Zwei Fragen richtig beantwortet und zwei nicht beantwortet ergibt einen Punkt. Alle anderen Fälle ergeben 0 Punkte.

**Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!**

| **VF-1:** | | |
|---|---|---|
| 1. | Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil. | |
| 2. | Die Multiplikation zweier Zahlen ist stets gut konditioniert. | |
| 3. | Die Funktion $f(x,y) = x + y^2$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. | |
| 4. | Die Funktion $f(x,y) = y\,e^{x^2}$ ist für $(x,0)$ mit $x \to \infty$ gut konditioniert. | |

| **VF-2:** Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $A$. Dann gilt $\kappa_2(B) \le \kappa_2(A)$. | |
| 2. | Es seien $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix $A$ bezüglich $\|\cdot\|$. Es gilt $\|\tilde{x} - x\| \le \kappa(A)\|\tilde{b} - b\|$. | |
| 3. | Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von $A$. | |
| 4. | Es existiert immer eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von $A$. | |

| **VF-3:** Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $P\,A = L\,R$. | |
| 2. | Eine $L\,R$-Zerlegung $P\,A = L\,R$ kann man verwenden um $A^{-1}$ zu bestimmen. | |
| 3. | Falls $A$ symmetrisch ist, existiert immer eine Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ von $A$. | |
| 4. | Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination. | |

| **VF-4:** Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine $QR$-Zerlegung von $A$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Es seien $m = n$, $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $A\,x = b \Leftrightarrow x = R^{-1}Qb$. | |
| 2. | Die Householder-Methode zur Bestimmung der $Q\,R$-Zerlegung ist immer stabil. | |
| 3. | Es gilt: $\|A\|_2 = \|R\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm ist. | |
| 4. | Das Produkt zweier orthogonaler $m \times m$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix. | |

**VF-5:** Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $H_1, \ldots, H_k$ Householder-Transformationen, sodass $H_k \ldots H_2 H_1 A = R$ ist, mit einer oberen Dreiecksmatrix $R$. Weiter sei $Q = H_k \ldots H_2 H_1$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Für jede der Householder-Transformationen $H_j$, $1 \le j \le k$, gilt $H_j^{-1} = H_j$. | |
| 2. | Die Produktmatrix $Q$ ist orthogonal. | |
| 3. | Die Produktmatrix $Q$ ist immer eine Spiegelung. | |
| 4. | Es seien $m = n$ und $A$ regulär. Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist. | |

**VF-6:** Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \le m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \min \Leftrightarrow A^T\,(A\,x - b) = 0$. | |
| 2. | Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. | |
| 3. | Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$. | |
| 4. | Die Matrix $R$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen. | |

**VF-7:** Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von $\Phi$ an der Stelle $x$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^\star)\| < 1$. | |
| 2. | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 1. | |
| 3. | Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration. | |
| 4. | Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^\star\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1. | |

**VF-8:** Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^\star) = 0$, $f'(x^\star) \ne 0$. Weiter sei $[a, b]$ ein Intervall, sodass $a < x^\star < b$ und $x^\star$ die einzige Nullstelle von $f$ in $[a, b]$ ist.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Das Bisektionsverfahren konvergiert, wenn man die Startwerte $x_0 = a$, $x_1 = b$ wählt. | |
| 2. | Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$. | |
| 3. | Es sei $f$ konvex auf $[a, b]$, d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$. | |
| 4. | Es sei $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Dann gilt: $\Phi'(x^\star) = 0$. | |

| **VF-9:** Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x^\star$. | |
| 2. | Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem. | |
| 3. | Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode. | |
| 4. | Um Konvergenz des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu gewährleisten, muss der in diesem Verfahren verwendete Parameter hinreichend groß gewählt werden. | |

| **VF-10:** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad $n$, das die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ interpoliert. Es seien $\delta_n$ der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\dots,x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n$ von $f$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Es gilt: $P(f \mid x_0,\dots,x_n)(x) = P(f \mid x_0,\dots,x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. | |
| 2. | Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0,\dots,x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen $x_i$ äquidistant wählt. | |
| 3. | Es sei $f$ ein Polynom vom Grad maximal $n$. Dann gilt: $f(x) = P(f \mid x_0,\dots,x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. | |
| 4. | Es gilt: $\delta_n = [x_n,\dots,x_0]f$. | |

| **VF-11:** Es sei $f \in C^\infty([a,b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Es sei $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \le x_0 < \dots < x_m \le b$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0,\dots,x_m)(x)\,dx$, wobei $P(f \mid x_0,\dots,x_m)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad $m$ ist. | |
| 2. | Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = I(f)$ falls $f$ ein Polynom vom Grad maximal $m$ ist. | |
| 3. | Es sei $m$ fest gewählt. Der Fehler $\|I_m(f) - I(f)\|$ ist bei einer Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei einer Newton-Cotes Formel. | |
| 4. | Für die Newton-Cotes Formeln gilt $\|I_m(f) - I(f)\| \to 0$ für $m \to \infty$. | |

| **VF-12:** Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f(t,y)$, $t \in [t_0, T]$, mit Anfangswert $y(t_0) = y^0$. | | |
|---|---|---|
| 1. | Der lokale Abbruchfehler misst, wie sehr der durch das numerische Verfahren gelieferte Wert nach einem Schritt von der exakten Lösung abweicht. | |
| 2. | Eine sehr hohe Konsistenzordnung kann man nur mit impliziten Verfahren realisieren. | |
| 3. | Die Größe des lokalen Abbruchfehlers bestimmt die Konsistenzordnung. | |
| 4. | Das verbesserte Eulerverfahren hat die Konvergenzordnung 2. | |

**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix $D$ (mit skalierter Matrix $B := D\,A$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die $L\,R$-Zerlegung von der skalierten Matrix $B = D\,A$ mit Spaltenpivotisierung, d. h. $P\,B = L\,R$. Geben Sie die Matrizen $P$, $L$ und $R$ explizit an.

c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A$. Verwenden Sie hierzu die $L\,R$-Zerlegung aus den vorherigen Aufgabenteilen. (Achtung: Andere Lösungswege werden mit 0 Punkten bewertet.)

**Aufgabe 2** (8 Punkte)

Gegeben sind die vier Meßwerte

| $t_i$ | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2.1 | -1.1 | -1.8 | 0.9 |

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha\,\cos(\pi\,t) + \beta\,\sin(\pi\,t)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie $A$, $b$ und $x$ explizit an.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Normalgleichungen (**Gleichungssystem nicht lösen**).

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem aus a) mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

**Aufgabe 3** (9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + y^2 - 4\,x^2 \\ x + 2 - (y - 0.5)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sollen iterativ mit Fixpunktiterationen bestimmt werden.

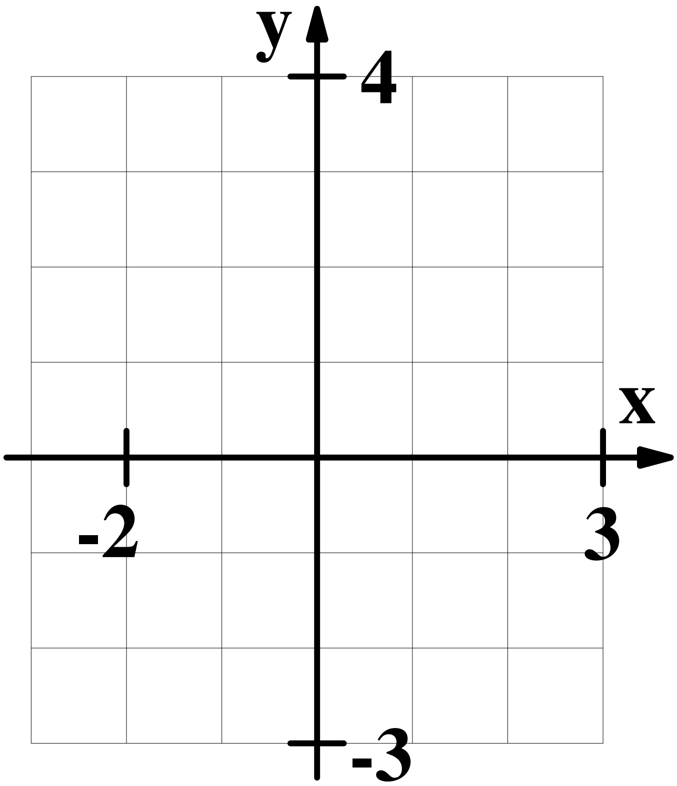
a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit $\pm 0.5$).

b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,2] \times [1, 2.5]$ und die Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5\,\sqrt{1+y^2} \\ 0.5 + \sqrt{2+x} \end{pmatrix} =: F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erfüllt sind. Verwenden Sie die $\infty$-Norm.

c) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0,\ y_0) = (2,\ \sqrt{3})$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-3}$ anzunähern? Verwenden Sie als Kontraktionszahl $L = 3/4$.




**Aufgabe 4** (6 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2 - e^{-x^2}}\, dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte ($n$) braucht man mit der summierten Trapezregel, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ zu erreichen?

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für $I$ mit der Schrittweite $h = 1.0$ und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

c) Bestimmen Sie mittels der summierten Trapezregel eine Näherung für $I$ mit der Schrittweite $h = 0.5$ und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

**Hinweis:** Für $f(x) = \dfrac{1}{2 - e^{-x^2}}$ und $x \in [-1, 1]$ gilt $|f'(x)| \leq 0.55$, $|f^{(2)}(x)| \leq 2$, $|f^{(3)}(x)| \leq 6$ und $|f^{(4)}(x)| \leq 36$.

**Aufgabe 5** (7 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) - (4t - 1)y'(t) = 0, \qquad y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1.$$

Berechnen Sie mit dem impliziten Euler–Verfahren ($y_{i+1} = y_i + h\, f(t_{i+1},\, y_{i+1})$) und der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ jeweils eine Approximation von $y(1)$ und $y'(1)$. Bestimmen Sie außerdem $y''(1)$.