

Verständnisfragen-Teil

(24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). Bewertung: Vier Fragen richtig beantwortet ergibt 2 Punkte. Drei Fragen richtig beantwortet und die 4. nicht beantwortet ergibt 1.5 Punkte. Zwei Fragen richtig beantwortet und zwei nicht beantwortet ergibt einen Punkt. Alle anderen Fälle ergeben 0 Punkte.

Beantworten Sie in jeder der 12 Aufgaben mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.	
1.	Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $ \text{fl}(x) \leq x $.
2.	In $\mathbb{M}(2, 4, -4, 4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{16}$.
3.	Die Zahl 0.25 ist in $\mathbb{M}(2, 12, -99, 99)$ exakt darstellbar.
4.	Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\text{fl}(x) = x(1 + \varepsilon)$ für ein ε mit $ \varepsilon \leq \text{eps}$.

VF-2: Aufgaben zur relativen Kondition.	
1.	Die Funktion $f(x_1, x_2) := x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $ x_1 \leq 1$ gut konditioniert.
2.	Eine gute Kondition eines Problems impliziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur Lösung des Problems.
3.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.
4.	Die Addition zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist gut konditioniert.

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.	
1.	Für die Konditionszahl $\kappa(A)$ der Matrix A gilt $\kappa(A) \geq 1$.
2.	Zeilenäquibrierung ($B = DA$) führt auf eine Matrix B mit $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(A)$.
3.	Es existiert immer eine LR -Zerlegung $A = LR$ von A .
4.	Es sei $A = QR$ eine QR -Zerlegung von A . Es gilt $x = Q^T b$.

VF-4: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definite Matrizen. Sei $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung von A .	
1.	AB ist immer symmetrisch positiv definit.
2.	Es gilt $\det(A) = \det(D)$.
3.	Sei $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm. Es gilt $\kappa(A) = \kappa(D)$.
4.	Es existiert immer eine LR -Zerlegung $A = LR$ von A .

VF-5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und G_1, \dots, G_k Givens-Rotationen, so dass $G_k \dots G_2 G_1 A = R$, mit einer oberen Dreiecksmatrix R .	
1.	Es sei $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm. Es gilt $\kappa(G_j) = 1$ für alle $j = 1, \dots, k$.
2.	Die Produktmatrix $G_k \dots G_1$ kann man geometrisch als eine Rotation interpretieren.
3.	Es gilt: $A = QR$, mit $Q = G_1 \dots G_k$.
4.	Das Givens-Verfahren zur Berechnung einer QR -Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung ein stabiles Verfahren.

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R$ gilt. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen Ax^* und b .	
1.	Je größer der Winkel Θ , desto schlechter ist das Problem konditioniert.
2.	Es gilt $Rx^* = Qb$.
3.	Es gilt $A^T Ax^* = A^T b$.
4.	Sei $Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Es gilt $\ Ax^*\ _2 = \ b_2\ _2$.

VF-7: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \frac{1}{1+x}$, mit $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq -1$, wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.	
1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung in $[0, \infty)$.
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in diesem Fall 2.
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 > -1$.

VF-8: Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{x^2} - 4$.	
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* .
2.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^* .
3.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^* .
4.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f , konvergiert für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle x^* .

VF-9: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* eine Lösung des Nullstellenproblems $f(x) = 0$.	
1.	Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' (Jacobi-Matrix) nicht.
2.	Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren für alle Startwerte die hinreichend nahe bei x^* liegen, und die Konvergenzordnung ist 2.
3.	Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension $n = 1$.
4.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren gewährleistet für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens.

VF-10: Es sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .	
1.	Sei $f(x) = x^3 + 2x$. Es gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 1$.
2.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal wenn man bei der Polynominterpolation den Interpolationsfehler minimieren will.
3.	Es gilt $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \delta_n x^n + P(f x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ für alle x .
4.	Es gilt $P(f x_0, x_1, \dots, x_n)(x) = P(f x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)(x)$ für alle x .

VF-11: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$.	
1.	Die absolute Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grade 4.
3.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte w_j von der Funktion f ab.
4.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f , wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Fehler minimal wird.

VF-12: Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y)$, $t \in [t_0, T]$, mit Anfangswert $y(t_0) = y^0$.	
1.	Bei impliziten Einschrittverfahren ist die Konvergenzordnung immer höher als bei expliziten Einschrittverfahren.
2.	Der lokale Abbruchfehler misst den maximalen Fehler zwischen numerischer Annäherung und exakter Lösung.
3.	Bei Einschrittverfahren ist die Konsistenzordnung der Regel höher als die Konvergenzordnung.
4.	Der lokale Abbruchfehler wird verwendet, um die Konsistenzordnung des zugehörigen Verfahrens zu bestimmen.

Aufgabe 1

(7 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2.56 & -2.24 & -3.2 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Führen Sie eine Zeilenäquilibrierung von A durch. Geben Sie die zur Skalierung benutzte Diagonalmatrix D und die resultierende Matrix $B := DA$ jeweils explizit an.
- Bestimmen Sie die LR -Zerlegung der skalierten Matrix $B = DA$ mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P , L und R explizit an.
- Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der in Teil b) bestimmten LR -Zerlegung für eine gegebene rechte Seite $b = (-2, -3.2, 33)^T$. (Achtung: Andere Lösungswege werden mit 0 Punkten bewertet.)

Aufgabe 2

(9 Punkte)

In festen Abständen von 0.1 Sekunden wurde ein Signal abgetastet, hinter dem man eine Schwingung der Form $f(t) = \sin(\omega t) + c$ vermutet. Es ergab sich folgende Messwerttabelle:

t_i	0.1	0.2	0.3
f_i	-0.5	1	1.3

- Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$ explizit auf (Messwerte schon einsetzen!).
- Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert $x^0 = (\omega^0, c^0) = (0.9, 0.4)$ gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.
- Bestimmen Sie die Lösung Δx^0 des so entstandenen linearen Ausgleichsproblems mit Hilfe einer QR -Zerlegung über Householder-Transformationen. Geben Sie x^1 explizit an.
- Bestimmen Sie nach diesem Schritt das Residuum (in der euklidischen Norm) sowohl des linearisierten Problems als auch des nichtlinearen Ausgleichsproblems.

Aufgabe 3 Ist eine Vereinfachung der Aufgabe 3 aus der Klausur F07

(9 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{4} + \frac{(x-y)^2}{6} \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} =: F(x, y).$$

- Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0, 1] \times [0, 1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.
- Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0, 0)$ zwei Iterationsschritte durch, d.h. berechnen Sie (x_2, y_2) .
- Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.
- Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0, 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 6 \cdot 10^{-5}$ anzunähern?

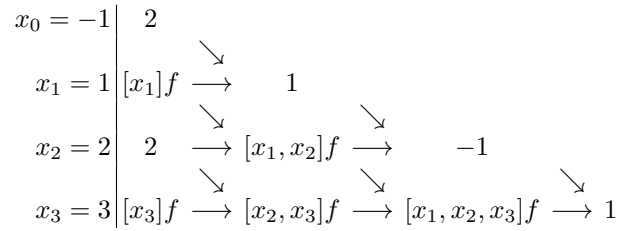
Aufgabe 4

(5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x_i) & 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}$$

a) Berechnen Sie die fünf fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:



(Geben Sie die zu ergänzenden Werte dabei separat und mit nachvollziehbarem Rechenweg unterhalb der Aufgabenstellung an.)

- b) Stellen Sie für das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 zur gegebenen Wertetabelle eine Newton-Darstellung auf. Berechnen Sie anschließend $p_3(0)$ durch Horner-artige Auswertung dieser Newton-Darstellung.
- c) Für die n -ten Ableitungen von f gelte $\max_{x \in [-1, 3]} |f^{(n)}(x)| \leq 3 \cdot 2^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine möglichst scharfe Abschätzung für $|f(0) - p_3(0)|$.

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$-\frac{1}{2}y''(t) + \frac{4}{t^2}y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 2t \text{ für } t \in [1, 2], \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Wenden Sie die implizite Trapezregel mit Schrittweite $h = 1$ an, um Näherungen für $y(2)$ und $y'(2)$ zu berechnen.