Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). **Bewertung:** Vier Fragen richtig beantwortet ergibt zwei Punkte. Drei Fragen richtig beantwortet und die 4. falsch oder nicht beantwortet ergibt einen Punkt. Alle anderen Fälle ergeben 0 Punkte.

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -1, 4)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.1$.	
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\|\epsilon\| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x(1 + \epsilon)$.	
3.	Es gilt $\|\text{fl}(x) - x\| \leq \text{eps}\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
4.	Die Zahl 32 ist in $\mathbb{M}(2, 6, -8, 8)$ exakt darstellbar.	

VF-2:		
1.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	
2.	Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur numerischen Lösung des Problems.	
3.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	
4.	Die Funktion $f(x) = x \ln(x)$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $\|x - 1\| \ll 1$.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Es gilt $A^{-1} = R^{-1}Q^T$.	
2.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl bzgl. $\\|\cdot\\|$. Bei Störung der Eingabedaten b ist der absolute Fehler in der Lösung $\\|\tilde{x} - x\\|$ maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der absolute Eingabefehler $\\|\tilde{b} - b\\|$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
4.	Sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$ oder $\det(A) = -\det(R)$.	

VF-4: Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.		
1.	Es gilt $\det(D) > 0$.	
2.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen.	
3.	Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A ist Pivotisierung notwendig.	
4.	Die inverse Matrix A^{-1} ist symmetrisch positiv definit.	

VF-5: Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation.		
1.	Es gilt $Q_v^T = Q_v$.	
2.	Das Produkt zweier Householder-Transformationen ist eine orthogonale Matrix.	
3.	Es gilt $\kappa(Q_v) = 1$, wobei $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm ist.	
4.	Die Berechnung einer $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von A über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix A eine kleine Konditionszahl hat.	

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^\star$ und b.		
1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Die Matrix R kann man über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
4.	Es gilt $A\,x^\star - b \perp \text{Bild}(A)$.	

VF-7: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = e^{-x}$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}$.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ erfüllt.	
3.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ erfüllt.	
4.	Die Fixpunktiteration mit der Funktion Φ konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$.	

VF-8: Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = \lvert x\rvert^{2.5} - 3$.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $[0, \infty)$.	
2.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle.	
3.	Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*, und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Es gilt $\lvert x_k - x^*\rvert \approx (x_k - x_{k+1})^2$ für k hinreichend groß.	
4.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen eine Nullstelle.	

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*.	
2.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Matrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	
3.	Die Gauß-Newton Methode kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
4.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton Methode ist in der Regel 2.	

VF-10: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Sei $f(x) = x^2 + 2$. Es gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 0$.	
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n(x - x_n) + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ für alle x.	
3.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\rvert$ hängt nicht von der Wahl der Stützstellen ab.	
4.	Es gilt $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\rvert \le \max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) - f(x)\rvert$.	

VF-11: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$.		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen äquidistant gewählt werden.	
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(x^3) = I(x^3)$.	
3.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a, b]$ ab.	
4.	Seien $Q_m^{NC}(f)$ und $Q_m^{G}(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \ge 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $Q_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $Q_m^{G}(f)$.	

VF-12: Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y)$, $t \in [t_0, T]$, mit Anfangswert $y(t_0) = y^0$ und f Lipschitz-stetig in y.		
1.	Das verbesserte Euler-Verfahren hat die Konsistenzordnung 1.	
2.	Der lokale Abbruchfehler im Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ misst den maximalen Fehler zwischen numerischer Annäherung und exakter Lösung, wobei im numerischen Verfahren als Eingabewert $y^j = y(t_j)$ genommen wird.	
3.	Bei Einschrittverfahren ist die Konvergenzordnung gleich der Konsistenzordnung.	
4.	Die Größe des lokalen Abbruchfehlers sei $\mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$. Dann ist die Konsistenzordnung des Verfahrens p.	

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -15 \\ -4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die L, R-Zerlegung $P\,A = L\,R$ mit Spaltenpivotisierung *ohne* Zeilenäquilibrierung. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der $L\,R$-Zerlegung aus Aufgabenteil a).

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ unter Verwendung der Matrizen P, L und R aus Aufgabenteil a).

d) Ausgehend davon, dass die Matrix A ungestört vorliegt: Wie groß darf die relative Störung in b, gemessen in der Unendlichnorm, höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls in der Unendlichnorm gemessen, nicht größer als ein Prozent ist?
Hinweis: Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{71}{7}$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben sind die vier Messwerte

t_i	0	1/4	1/2	3/4
y_i	-1.9	1.1	2.1	-0.9

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha\,\cos(2\,\pi\,t) + \beta\,\sin(2\,\pi\,t)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A, b und x explizit an.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Normalgleichungen und geben Sie diese explizit an.

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem aus a) mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4\,y^2 - x^2 - 4\,x \\ x^2 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 3. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f(x) := \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

a) Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ in Newton-Darstellung.

b) Schätzen Sie den Fehler $|f(0.3) - P(f|x_0, x_1, x_2)(0.3)|$ möglichst gut ab, ohne f explizit auszuwerten.

c) Sie wollen f an der Stelle $x = 100$ auswerten. Wie schätzen Sie die Qualität von $P(f|x_0, x_1, x_2)(100)$ als Approximation an $f(100)$ ein? (Werten Sie f nicht explizit aus.) Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Es sei $f(x) := (x+1)^2 e^{-x}$. In dieser Aufgabe betrachten wir das Integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2 e^{-x} dx$$

und seine numerische Approximation.

a) Wir möchten das Integral mit Hilfe der Mittelpunktsregel approximieren. Zeichnen Sie die zur Mittelpunktsregel gehörende Fläche in die Abbildung (s.u.) ein und bestimmen Sie deren Größe.

b) Wieviele Schritte (n) braucht man mit der summierten Simpsonregel, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-3}$ zu garantieren? Berechnen Sie zu diesem n den Wert der summierten Simpsonregel.

c) Wieviele Schritte (n) braucht man, um mit der summierten Simpsonregel eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{10^{-3}}{2^8}$ zu garantieren?

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die folgenden Abschätzungen für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gelten:

$$|f^{(1)}(x)| \leq 2, \quad |f^{(2)}(x)| \leq 2, \quad |f^{(3)}(x)| \leq 7, \quad |f^{(4)}(x)| \leq 14, \quad |f^{(5)}(x)| \leq 26.$$