Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau

Prof. Dr. Arnold Reusken

Donnerstag 25. August 2016

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
  ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ____________________

Sie haben insgesamt 120 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. Sie können Ihre Klausur am **Donnerstag, dem 8. September 2016** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.
Die Klausur kann nach einer Aufbewahrungsfrist von 3 Jahren (ab Januar 2020) innerhalb von drei Wochen am Institut abgeholt werden.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Dezimalzahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl}: \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	Es gilt $\lvert \text{fl}(x+y)\rvert \le \lvert \text{fl}(x)\rvert + \lvert \text{fl}(y)\rvert$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$.	
2.	Es gilt $\text{eps} = \frac{m^{1-b}}{2}$.	
3.	In $\mathbb{M}(2,8,-2,2)$ ist $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{8}$.	
4.	Die Funktion $f(x) = x\ln(x)$ ist gut konditioniert für $x \to \infty$.	
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 23 in $\mathbb{M}(7,6,-8,8)$ an.	
6.	Die Funktion $f(x,y) = \frac{x}{y}$ ist für alle (x,y) mit $y \neq 0$ gut konditioniert.	
7.	Wir betrachten die Berechnung einer Summe $S_m := \sum_{j=1}^{m} x_j$. Die Stabilität dieser Summenbildung hängt von der Reihenfolge der Summanden x_j ab.	
8.	Ein Algorithmus zur numerischen Lösung eines Problems ist stabil, wenn das vorliegende Problem gut konditioniert ist.	
9.	Für schlecht konditionierte Probleme gibt es keine stabilen Algorithmen zur Lösung des Problems.	
10.	Es seien $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 2$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $Bx^* = b$.	
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\lVert r\rVert}{\lVert b\rVert} \le \kappa(A)\frac{\lVert x^*-\tilde{x}\rVert}{\lVert x^*\rVert}$, mit $\kappa(A) := \lVert A\rVert \lVert A^{-1}\rVert$.	
3.	Es existiert immer eine QR-Zerlegung $A = QR$ von A.	
4.	Es sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A. Dann gilt $Rx^* = Qb$.	
5.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	
6.	Es existieren stets eine Permutationsmatrix P, eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $PA = LR$ gilt.	
7.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $Ry = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
8.	Ohne Pivotisierung ist die Gauss-Elimination nicht für jedes A durchführbar.	
9.	Falls die Matrix A orthogonal ist, gilt $\kappa_2(A) = 1$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der euklidischen Norm ist.	
10.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\lVert D\rVert_2$.	

VF-3:		
1.	Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung.	
2.	Es sei $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung der positiv definiten Matrix A. Dann gilt $A^{-1} = LD^{-1}L^T$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
4.	Für jede symmetrische orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.	
5.	Es sei $A = LDL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\det(A^{-1})$ an.	
6.	Das Produkt zweier Householder-Transformationen ist eine Spiegelung.	
7.	Das Produkt zweier Givens-Transformationen ist eine Rotation.	
8.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Dann gilt: $Q_v v = -v$.	
9.	Eine QR-Zerlegung $A = QR$ von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert nur dann, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	
10.	Es seien $v, x \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\|Q_v x\|_2^2$ an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ferner seien $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen Ax^* und b.

1.	Es gilt $\det(\tilde{R}) \neq 0$.	
2.	Es gilt $\tilde{R}x^* = Qb$.	
3.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$.	
4.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ.	
6.	Es sei $LDL^T = A^TA$ die Cholesky-Zerlegung von A^TA. Dann gilt $x^* = L^{-T}D^{-1}L^{-1}A^Tb$.	
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist die Konvergenzordnung in der Regel zwei.	
9.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren kann den Einzugsbereich der Methode erweitern.	
10.	Es seien $m = 3$, $n = 1$ und $Qb = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.	

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.		
1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die lokale Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\lVert\Phi'(x^*)\rVert < 1$.	
3.	Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle eines Gleichungssystems $f(x) = 0$ kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	
5.	Es seien $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$.	
6.	Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(M) \neq 0$, und $\Phi(x) := x - Mf(x)$. Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ hat dieselbe Lösungen wie das das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.	
7.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Es gilt: $x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k$ für k hinreichend groß.	
8.	Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion konvergiert nur dann wenn die Startwerte x_0, x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	
9.	Es sei $f(x) = x^2 - 2$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^*, und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Geben Sie die lokale Konvergenzordnung an, mit der die Newton Methode für diesen Fall mindestens konvergiert.	

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es sei $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(Q \mid x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_{n-1}, \ldots, x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
3.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
4.	Es gilt $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\rvert \leq \max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) - f(x)\rvert$.	
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$. Berechnen Sie $P(f\lvert x_0, x_1)(\frac{7}{4})$.	
Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
6.	Es seien $I_m^{NC}(f)$ und $I_m^G(f)$ die Newton-Cotes und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $I_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $I_m^G(f)$.	
7.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom. Bei der Gauss-Quadratur gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	
8.	Es seien $f \in C^4[a, b]$ und $I_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $\lvert I_2^n(f) - I(f)\rvert \leq ch^5$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	
9.	Bei der Gauss-Quadratur hängen die Stützstellen x_j von der Funktion f ab.	
10.	Es seien $a = 0$, $b = 1$ und $I_2(f)$ die Simpsonregel. Berechnen Sie den Fehler $I(x^3 + 1) - I_2(x^3 + 1)$.	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $\alpha \in [-1, 1]$ ein Parameter, sowie

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 3 & 1 & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & 3\alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad b(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ 5 \\ 8\alpha + \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Gleichungssystems $A(\alpha) \cdot x(\alpha) = b(\alpha)$.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A in Abhängigkeit von α mit Pivotisierung (jedoch ohne Zeilenäquilibrierung), d. h. $PA = LR$. Geben Sie $L(\alpha)$, $R(\alpha)$ und $P(\alpha) = P$ explizit an.
Hinweis: Es ist wichtig den Wertebereich von α zu beachten!

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung.
Ist das Gleichungssystem $A(\alpha) \cdot x(\alpha) = b(\alpha)$ für alle $\alpha \in [-1, 1]$ eindeutig lösbar? Geben Sie jene α an, für welche dies der Fall ist.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, wobei angenommen wird, dass $A(\alpha)$ vollen Spaltenrang hat.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

x_i	$-\sqrt{15}/5$	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{15}/5$
y_i	2.56	1.77	-3.21	-1.78	2.57

Die Werte in der oben gegebenen Tabelle gehorchen näherungsweise dem Gesetz

$$y(x) = e^{\alpha}(5x^3 - 3x) + \beta(3x^2 - 1) .$$

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$. Geben Sie A, b und x explizit an.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die Normalengleichungen und geben Sie α und β explizit an.

c) Berechnen Sie das Residuum für die in b) gefundenen Parameter.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + x\,(1-x)\,y\,(1-y) \\ \frac{1}{2}\,(1+x-y) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_1$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ zwei Fixpunktschritte durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) unter Verwendung der $\|\cdot\|_1$-Norm an.

d) Wie viele Iterationsschritte/Fixpunktschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_1$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-5}$ anzunähern?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$F(x)$	-0.001339	-0.01084	-0.03739	-0.09158	-0.1875	-0.3473	-0.6159

Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von drei Tabellenwerten und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis:

$$F'(x) = \ln(\cos x) \to F''(x) = -\tan x \to F^{(3)}(x) = -\left(1 + \tan^2 x\right) \to F^{(4)}(x) = -2\tan x\left(1 + \tan^2 x\right).$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x ,$$

die um höchstens $\epsilon = 0.04$ von der exakten Lösung abweicht.

a) Wie viele Schritte sind dafür mit der summierten Trapezregel notwendig?

b) Geben Sie den Näherungswert des Integrals für die in a) berechnete Schrittzahl an.

c) Wie viele Schritte wären mit der summierten Gaußformel notwendig, die pro Intervall die gleiche Stützstellenzahl wie die Trapezregel hat?

Hinweis: Für $x \in [0,1]$ gilt $|f^{(1)}(x)| \leq 1.29$, $|f^{(2)}(x)| \leq 2.3$, $|f^{(3)}(x)| \leq 14.5$, $|f^{(4)}(x)| \leq 28.5$, $|f^{(5)}(x)| \leq 53.6$