Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau

Prof. Dr. Arnold Reusken

Dienstag 28. März 2017

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
  ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ______________________

Sie haben insgesamt 120 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Donnerstag, dem 6. April 2017** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: ______________________

Vornare: ______________________

Unterschrift: ______________________

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Dezimalzahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := fl(fl(x) - fl(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.	
2.	Es existiert ein $x \in \mathbb{D}$, so dass $\frac{\lvert\text{fl}(x)-x\rvert}{\lvert x\rvert} = \text{eps}$.	
3.	Die Zahl 31 ist in $\mathbb{M}(2,6,-8,8)$ exakt darstellbar.	
4.	Es gilt $\frac{\lvert(x\ominus y)-(x-y)\rvert}{\lvert x-y\rvert} \le \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ mit $x \neq y$.	
5.	Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3,2,-1,3)$.	
6.	Es gilt $\frac{\lvert(x\ominus y)-(x-y)\rvert}{\lvert x-y\rvert} \le \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x \neq y$.	
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	
8.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	
9.	Die Funktion $f(x_1,x_2) = x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1,x_2) mit $\lvert x_1\rvert \le 1$ gut konditioniert.	
10.	Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es sei $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\lVert r\rVert \le \kappa(A)\lVert\tilde{x} - x\rVert$, mit $\kappa(A) := \lVert A\rVert\lVert A^{-1}\rVert$.	
2.	Es existiert stets eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$ gilt.	
3.	Falls A orthogonal ist, gilt $A^T A = I$.	
4.	Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\lVert\cdot\rVert$. Es gilt $\kappa(A\,B) \le \kappa(A)\kappa(B)$.	
5.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Geben Sie $\lVert B\rVert_\infty$ an.	
6.	Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky Zerlegung.	
7.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}n^3$ Operationen (gem. Vorlesung/Buch).	
8.	Pivotisierung verbessert die Kondition der Gauß-Elimination.	
9.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\lvert\det(A^{-1})\rvert = \frac{1}{\lvert\det(R)\rvert}$.	
10.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\lVert A\rVert_1$.	

VF-3: Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.		
1.	Es gilt $\|A\|_2 = \|D\|_2$.	
2.	Das Problem $Ax = b$ ist immer gut konditioniert.	
3.	Das Cholesky-Vefahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.	
4.	Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A ist Pivotisierung notwendig.	
5.	Es sei Q eine orthogonale Matrix und $Q \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\lvert c\rvert$ an.	
6.	Es gilt $A^{-1} = LD^{-1}L^T$.	
7.	Das Produkt zweier Givens-Rotations-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	
8.	Es seien $Q_v \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Householder-Transformations-Matrix und $x \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Es gilt $\|Q_v x\|_\infty = \|x\|_\infty$.	
9.	Die Berechnung einer QR-Zerlegung $B = Q\,R$ von $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix B vollen Spaltenrang hat.	
10.	Es sei Q_v eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix Q_v an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.		
1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto kleiner ist die Größe $\frac{\|A\,x^* - b\|_2}{\|b\|_2}$.	
2.	Es gilt $\tilde{R}\,x^* = Q^T\,b$.	
3.	Die Matrix $\tilde{R}$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	
4.	Es gilt $\det(\tilde{R}) = \det(A)$.	
5.	Es seien $m = 4$, $n = 3$ und $Q\,b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$.	
6.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	
7.	Durch eine geeignete Wahl des skalaren Parameters im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems wird die Konvergenzordnung der Methode in der Regel erhöht.	
8.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
9.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer maximal 1.	
10.	Es sei $\Theta = 0$. Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$.	

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x. Für $n = 1$ sei außerdem $\Phi_1(x) := \frac{1}{4}x^2 - 1$.		
1.	Es gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	
2.	Die Konvergenzordung der Fixpunktiteration ist maximal 2.	
3.	Das Fixpunktproblem $\Phi_1(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in $\mathbb{R}$.	
4.	Für Φ_1 sind auf dem Intervall $[-1, 0]$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.	
5.	Wir betrachten die Fixpunktiteration zur Bestimmung einer Lösung $x^* < 0$ des Fixpunktproblems $\Phi_1(x) = x$, mit einem Startwert x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*. Geben Sie die Konvergenzordnung dieser Methode an.	
6.	Bei der Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion f, müssen die Startwerte x_0, x_1 so gewählt werden dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	
7.	Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	
8.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton Vefahren zur Bestimmung einer Nullstelle kann man nur bei skalarwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwenden.	
9.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Dann gilt: $\|x^* - x_k\| \approx (x_{k+1} - x_k)^2$ für k hinreichend groß.	
10.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf dem Intervall $[0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an.	

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \ldots, x_n]f + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
2.	Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.	
3.	Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.	
4.	Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.	
5.	Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$. Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$.	
Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
6.	Es sei $I_2(f)$ die Simpsonregel. Dann gilt $\|I_2^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	
7.	Es gilt $I_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal m.	
8.	Es gilt $I_1^n(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n.	
9.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a, b]$ ab.	
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^5\,dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel $I_1^2(f)$.	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $\alpha \in (0, 0.9]$ eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3\alpha & 1-\alpha & 3\alpha+2 \\ 3 & 3 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3-4\alpha \\ 8+\alpha \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A in Abhängigkeit von α (ohne Pivotisierung). Geben Sie L und R explizit an.

b) Geben Sie eine scharfe, obere Schranke für $\|A\|_\infty$ unabhängig von $\alpha \in (0, 0.9]$ an. Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar? Geben Sie alle $\alpha \in (0, 0.9]$ an, für welche das der Fall ist.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, wobei angenommen wird, dass A nicht singulär sei.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sollen so gewählt werden, dass die Messwerte

x_i	-1	0	1
f_i	5	9	-5

im Sinne kleinster Fehlerquadrate durch die Modellfunktion

$$f(x) = \alpha\left(\frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) + \beta\left(-8x^2 - 3x + 12\right)$$

optimal approximiert werden.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem auf.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit dem Householder-Verfahren und geben Sie die Norm des Residuums an.
Hinweis: Givensrotationen oder der Ansatz über Normalengleichungen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{4} - y &= 9 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

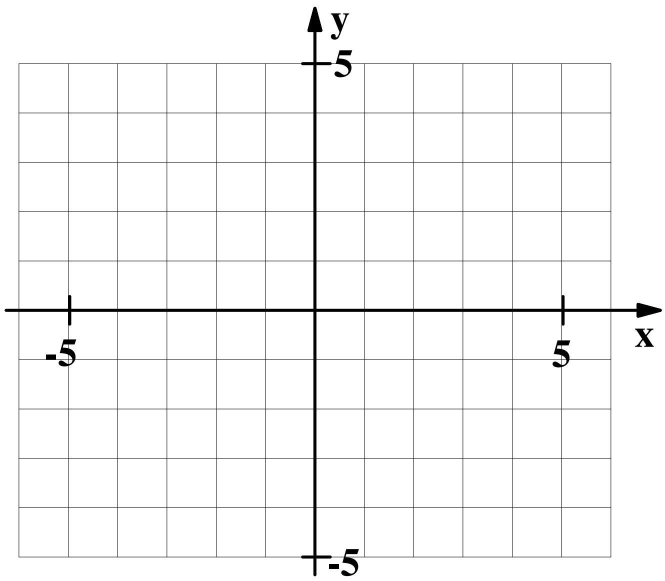
sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 3. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} ,$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.



Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle einer Funktion y

x_i	-1	0	1	2	4	8
y_i	-0.74682	0	0.74682	0.88208	0.88623	0.88623

a) Mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades ($p_2(x)$) berechne man einen möglichst guten Näherungswert für $y(1.5)$ mit dem Neville-Aitken-Schema. Geben Sie $p_2(1.5)$ explizit an.

b) Sei nun $y(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für den in Teil a) bestimmten Wert $p_2(1.5)$ an, ohne jedoch $y(1.5)$ zu berechnen!

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_{-1.2}^{1.2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1.2}^{1.2} \ln(\cos(x))\ \mathrm{d}x.$$

Zur numerischen Approximation wollen wir die 2-Punkt Gauß-Formel verwenden, welche für das Interval [-1,1] durch

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\, g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\, g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

gegeben ist.

a) Wieviele Schritte sind mit der summierten 2-Punkte Gauß-Formel notwendig, um einen Fehler von höchstens 10^{-3} zu erhalten?

b) Berechnen Sie den Näherungswert für $I(f)$ mittels der summierten 2-Punkt Gauß-Formel für $n = 1$ Teilintervalle.

Hinweis: $f'(x) = -\tan x, \quad f''(x) = -\left(1+\tan^2 x\right), \quad f^{(3)}(x) = -2\tan x\left(1+\tan^2 x\right),$
$f^{(4)}(x) = -2\left(1+\tan^2 x\right)\left(1+3\tan^2 x\right), \quad f^{(5)}(x) = -8\left(1+\tan^2 x\right)\left(2\tan x + 3\tan^3 x\right).$