Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau

Prof. Dr. Arnold Reusken

Mittwoch 6. September 2017

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
  ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ______________________

Sie haben insgesamt 120 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Donnerstag, dem 21. September 2017** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Unterschrift: ______________________

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung.

1.	In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt eps $= 5 \cdot 10^{-5}$.	
2.	In $\mathbb{M}(2,4,-4,4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{32}$.	
3.	Die Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ hängt nicht von m ab.	
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq$ eps und $\text{fl}(x) = x(1+\epsilon)$.	
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 15 in $\mathbb{M}(3,8,-8,8)$ an.	
6.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, gibt es keine stabile Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
7.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	
8.	Es seien $x = 2$ und $y = -2 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	
9.	Die Funktion $f(x) = x^2 \ln(x)$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $\lvert x-1\rvert \ll 1$.	
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^3$ im Punkt $(2,0)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_\infty(B) = 1$.	
2.	Es sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Es gilt $\lVert\tilde{x} - x\rVert \leq \lVert A^{-1}\rVert \lVert\tilde{b} - b\rVert$.	
3.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A^2) \leq \kappa(A)^2$.	
4.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	
5.	Berechnen Sie $\lVert A\rVert_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.	
6.	Falls A symmetrisch positiv definit ist, existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	
7.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	
8.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Für die Lösung x gilt $x = R^{-1}L^{-1}Pb$.	
9.	Es existiert immer eine QR-Zerlegung $A = QR$ von A.	
10.	Es sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\kappa_2(A)$.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.		
1.	Die Matrix A sei symmetrisch positiv definit und $A = L\,D\,L^T$ sei die Cholesky-Zerlegung von A. Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$.	
2.	Die Matrix A sei symmetrisch positiv definit. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung von A über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen.	
3.	Die Matrix A sei symmetrisch positiv definit. Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ ist Pivotisierung notwendig.	
4.	Es sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Dann gilt $\det(A) = \det(R)$.	
5.	Es seien $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Bestimmen Sie $\det(Q_v)$.	
6.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ ist auch dann stabil, wenn $\kappa_2(A) \gg 1$ gilt.	
7.	Das Produkt zweier orthogonaler $n \times n$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	
8.	Das Produkt zweier symmetrisch positiv definiter Matrizen ist wieder symmetrisch positiv definit.	
9.	Es seien $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Es gilt $\kappa_\infty(Q_v) = 1$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Maximumnorm ist.	
10.	Es seien Q eine orthogonale Matrix und $Q\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$. Geben Sie $\lvert b\rvert$ an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter bezeichne $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\ \emptyset\end{pmatrix}$ gilt. Wir definieren $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} := Qb$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \lVert A\,x - b\rVert_2$.		
1.	Es gilt $\lVert Ax - b\rVert_2^2 = \lVert\tilde{R}x - b_1\rVert_2^2 + \lVert b_2\rVert_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
2.	Es gilt $R\,x^* = b_1$.	
3.	Die Berechnung der Zerlegung $QA = R$ über Householder-Transformationen ist nur dann durchführbar, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	
4.	Die Matrix R kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	
5.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Q\,b = (2, 1, 3, -4)^T$. Bestimmen Sie $\lVert Ax^* - b\rVert_2$.	
6.	Es gilt $\det(\tilde{R}) \neq 0$.	
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist in einer hinreichend kleinen Umgebung der Lösung immer konvergent.	
8.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgelichsproblems kann den Einzugsbereich der Methode erweitern.	
9.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.	
10.	Es sei $b \neq 0$. Bestimmen Sie $\frac{\lVert A^TAx^*\rVert_2}{\lVert A^Tb\rVert_2}$.	

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.		
1.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, ist die Konvergenzordnung immer 1.	
3.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist eine Fixpunktiteration.	
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	
5.	Sei $\Phi : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) := x^2 + x - \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie $\lvert\Phi'(x^*)\rvert$.	
6.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	
7.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.	
8.	Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei $x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k)$, mit $\det(f'(x_k)) \neq 0$, eine Iteration des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Lösung x^* von $f(x) = 0$. Es gilt: x_{k+1} ist die Nullstelle der linearen Taylor-Annäherung von f an der Stelle x^*.	
9.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, die Konvergenzordnung der Methode zu erhöhen.	
10.	Es sei $0 < \|\Phi'(x^*)\| < 1$. Geben Sie die Konvergenzordnung an, mit der die Fixpunktiteration lokal konvergiert.	

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Wir bezeichnen mit $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + [x_0, \ldots, x_n]f\, \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\rvert$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	
3.	Es sei $f(x) = x^3 + x^4$. Dann gilt: $f = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ für alle $n \geq 3$.	
4.	Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $P(f \mid x_0, x_1, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x)$.	
5.	Es sei $f(x) = 2x^3$. Bestimmen Sie $[x_0, \ldots, x_3]f$.	
Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Wir betrachten die Quadraturformel $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$, wobei $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, wird mit $I_m^n(f)$ bezeichnet.		
6.	Falls $f \in C^\infty[a, b]$ ist, so gilt für die Newton-Cotes Formeln $\lvert I_m(f) - I(f)\rvert \to 0$ für $m \to \infty$.	
7.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom mit äquidistanten Stützstellen $x_j,\ 0 \leq j \leq m$. Bei der Gauss-Quadratur gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	
8.	Bei der Gauss-Quadratur gilt $w_j \geq 0$ für $0 \leq j \leq m$.	
9.	Es seien $f \in C^3[a, b]$ und $I_0(f)$ die Mittelpunktsregel. Dann gilt $\lvert I_0^n(f) - I(f)\rvert \leq c \cdot h^3$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^3\,dx$ mit Hilfe der Simpsonregel $I_2(x^3)$.	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3/5 & -1/2 & 1/5 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2/5+\alpha \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung. Geben Sie L, R und P explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ly = Pb$.

c) Für welche α hat das Gleichungssystem $Rx = y$ bzw. $Ax = b$

  i) genau eine Lösung?

  ii) mehr als eine Lösung?

  iii) keine Lösung?

d) Berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ unter Verwendung der in a) gefundenen LR-Zerlegung für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die es mindestens eine Lösung gibt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Einem technischen Vorgang liegt die theoretisch begründete Modellfunktion

$$f(x) = \alpha(-1122\,x^2 + 1275\,x - 153) + \beta(130\,x^2 - 195\,x + 5)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ zugrunde.

Ihnen stehen die Messwerte

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	-15	10	61

zur Verfügung. Die Parameter α und β sollen im Sinne kleinster Fehlerquadrate optimal bestimmt werden.

a) Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem. Geben Sie alle zugehörigen Matritzen und Vektoren explizit an. Gibt es für das lineare Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen, ohne die Normalgleichungen aufzustellen. Wie groß ist das Residuum?

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\, \cos(y-1) + \frac{1}{4} \\ \cos(x+1)\, \sin\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{1}{2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [-1,1] \times [-1,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_1$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ zwei Fixpunktschritte durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) unter Verwendung der $\|\cdot\|_1$-Norm an.

d) Wie viele Iterationsschritte/Fixpunktschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_1$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-5}$ anzunähern?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{208}{25}$	4	0	-1	6	$\frac{21}{2}$

Diese Funktion soll durch ein Polynom mit den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ interpoliert werden.

a) Bestimmen Sie die Newton-Darstellung des Polynoms $P(f|x_0, x_1, x_2)(x)$.

b) Werten Sie die Newton-Darstellung aus Teilaufgabe a) mit dem Horner-Schema an der Stelle $y = -0.75$ aus.

c) Schätzen Sie den Fehler $|f(-0.75) - P(f|x_0, x_1, x_2)(-0.75)|$ möglichst gut ab.
Hinweis: Für die Ableitungen von f gilt $|f^{(1)}(x)| \leq 10, |f^{(2)}(x)| \leq 11, |f^{(3)}(x)| \leq 28, |f^{(4)}(x)| \leq 57$ für $x \in [-1, 1]$.

d) Wählen Sie eine zusätzliche ganze Zahl $x_3 \in \mathbb{Z}$ als Stützstelle so, dass $f(x)$ an der Stelle $y = -0.75$ möglichst gut approximiert wird. Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es sei $f(x) := \exp(x^2/3 - x)$. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^2 \exp(x^2/3 - x)dx$$

und seine numerische Approximation. Die 2-Punkte Gauß-Formel auf $[-1, 1]$ ist durch

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

gegeben.

a) Wir möchten das Integral mit Hilfe der summierten 2-Punkte Gauß-Formel mit der Schrittlänge $h = 1$ approximieren. Zeichnen Sie die Fläche, die mit dieser Quadraturregel ausgerechnet wird, in die Abbildung (s.u.) ein. Schreiben Sie die numerischen Werte der Stellen, an denen f ausgewertet werden muss, in die Skizze.

b) Bestimmen Sie für die summierte Mittelpunktsregel eine geeignete Schrittweite h so, dass der Quadraturfehler unter der Schranke $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ bleibt.
Hinweis: Für alle Ableitungen von f gilt $|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(0)|$ für $x \in [0, 2]$.

c) Führen Sie die Berechnung der summierte Mittelpunktsregel für die in b) gefundene Schrittweite h durch.