

Matr.-Nr.:

Platz-Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau
Prof. Dr. Arnold Reusken
Samstag 17. März 2018

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.
- Ein Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv-Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : _____

Sie haben insgesamt 120 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Freitag, dem 23. März 2018** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko-Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: _____

Vorname: _____

Unterschrift: _____

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	Σ :
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------------

Verständnisfragen-Teil

(30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie $\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung.	
1.	In $\mathbb{M}(10, 5, -8, 8)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-5}$.
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $ \epsilon \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x(1 + \epsilon)$.
3.	Es gilt: $ \text{fl}(x) - x \leq \text{eps} x $ für alle $x \in \mathbb{D}$.
4.	Es gilt $x_{\text{MAX}} = b^R$.
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 36 in $\mathbb{M}(7, 4, -8, 8)$ an.
6.	In $\mathbb{M}(2, 4, -4, 4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{64}$.
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.
8.	Es seien $x = 3$ und $y = 3 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.
9.	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist für alle $x \in [-1, 1]$ gut konditioniert.
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{\text{rel}}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 y^3$ im Punkt $(2, 1)$.

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.	
1.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A . Dann gilt $\ B\ _\infty = 1$.
2.	Es seien \tilde{x} eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\ x^* - \tilde{x}\ }{\ x^*\ } \leq \kappa(A) \frac{\ r\ }{\ b\ }$, mit $\kappa(A) := \ A\ \ A^{-1}\ $.
3.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A)\kappa(A^{-1}) = 1$.
4.	Es existiert immer eine L - R -Zerlegung der Form $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist.
5.	Berechnen Sie $\det(A^{-1})$ für $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
6.	Die Gauß-Elimination ohne Pivotisierung ist für jede symmetrisch positiv definite Matrix A durchführbar.
7.	Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $PA = LR$.
8.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}n^3$ Operationen.
9.	Es sei $A = LDL^T$ die L - D - L^T -Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D , für die $\det(D) > 0$ gilt. Dann ist A symmetrisch positiv definit.
10.	Es seien $n = 4$ und $A = LDL^T$ die L - D - L^T -Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D , für die $d_{ii} = i$ ($i = 1, \dots, 4$) gilt. Berechnen Sie $\det(A)$.

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $A = QR$ eine Q - R -Zerlegung von A , mit einer oberen Dreiecksmatrix R . Weiterhin seien H_1, \dots, H_k Householder-Transformationen mit $Q^T = H_k \dots H_2 H_1$.	
1.	Für jede symmetrische orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.
2.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ mit $ \alpha = 1$. Dann ist A eine orthogonale Matrix.
3.	Es gilt $ \det(A) = \det(R) $.
4.	Es gilt $A^T A = R^T R$.
5.	Es seien $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Q_v die Householder Transformation bezüglich v . Geben Sie $e_1^T Q_v v$ an.
6.	Es seien $m = n$ und $\det(A) \neq 0$. Dann gilt: $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.
7.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der Q - R -Zerlegung ist nur durchführbar wenn A vollen Rang hat.
8.	Jede Householder-Transformation H_j ist symmetrisch positiv definit.
9.	Die Produktmatrix Q^T ist orthogonal.
10.	Es seien $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Q_v die Householder Transformation bezüglich v . Geben Sie $\ Q_v x\ _2^2$ an.

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$ und Θ der Winkel zwischen Ax^* und b . Ebenso sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(\hat{x})\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$.	
1.	Je kleiner der Betrag des Winkels Θ , desto schlechter ist das lineare Ausgleichsproblem konditioniert.
2.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \min \Leftrightarrow (Ax - b) \perp \text{Bild}(A)$, wobei $\text{Bild}(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.
3.	Es gilt $\ Ax\ _2 = \ Rx\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
4.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ .
6.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$.
7.	Beim Gauß-Newton Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.
8.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.
9.	Mit einer geeigneten Wahl des im Levenberg-Marquardt-Verfahren verwendeten Parameters μ kann man den Einzugsbereich der Methode vergrößern.
10.	Es seien $m = 3$, $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\ Ax^* - b\ _2$.

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x .
 Weiterhin sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Für das Intervall $[a, b]$ gilt, dass $a < x^* < b$, wobei x^* die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$ ist.

1.	Es seien $n = 1$, $\Phi(x) := \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$, und $x^* = 0$. Die Fixpunktiteration konvergiert für alle Startwerte x_0 mit $ x_0 \leq \delta$ und $\delta > 0$ hinreichend klein.
2.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.
3.	Falls $\ \Phi'(x^*)\ _\infty = 2$ und $\ \Phi'(x^*)\ _2 = 0.6$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* .
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) := e^{-x}$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0.1, 2]$ erfüllt.
5.	Es sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$.
6.	Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' nicht.
7.	Es sei f konvex auf $[a, b]$, d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.
8.	Das Sekanten-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.
9.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, den Einzugsbereich der Methode zu vergrößern.
10.	Es seien x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und x_k , $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Geben Sie den Wert für p so an, dass $x^* - x_k \approx (x_{k+1} - x_k)^p$ für k hinreichend groß gilt.

VF-6: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n , das die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert.
 Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

1.	Es gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = P(f x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2.	Es gilt $\max_{x \in [a, b]} P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) \leq \max_{x \in [a, b]} P(f x_0, \dots, x_{n-1})(x) - f(x) $.
3.	Es gilt $P(Q x_0, \dots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n .
4.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, $0 \leq j \leq n$. Dann gilt $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)\ell_{jn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
5.	Es seien $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$ und $x_1 = 5$. Bestimmen Sie den Wert $[x_0, x_1]f$.
Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden. Weiter sei $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$.	
6.	Die relative Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.
7.	Bei der Gauß-Quadratur und bei den Newton-Cotes Formeln sind die Gewichte w_j unabhängig von der Funktion f .
8.	Die Gauß-Quadratur basiert auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f , wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Exaktheitsgrad von I_m maximal wird.
9.	Für die Newton-Cotes Formeln gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m(f) - I(f) = 0$.
10.	Es seien $a = 0$, $b = 1$ und $I_2(f)$ die Simpsonregel. Geben Sie das kleinste n an, für das der Fehler $I(2x^n + x) - I_2(2x^n + x)$ nicht 0 ist.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2\alpha + 2 & -2 \\ 4 & -\alpha + 1 & 2\alpha - 1 \\ 0 & 4\alpha & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8\alpha \\ -16 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Bestimmen Sie die L - R -Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung. Geben Sie L , R und P explizit an.
- Berechnen Sie $\det(A)$ unter Verwendung der in a) gefundenen Zerlegung für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für welche α hat die Matrix A vollen Rang?
- Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ unter Verwendung der in a) gefundenen Zerlegung für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\det(A) \neq 0$.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Wir betrachten das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay - b\|_2$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und Daten $b = (1, 0, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^4$. Von der Matrix sei die Q - R -Zerlegung $A = QR$ bekannt mit

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mithilfe der Q - R -Zerlegung. Geben Sie die Norm des Residuums $\|Ax - b\|_2$ an.
- Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mithilfe der Normalgleichungen.
Hinweis: Die Matrix A muss dazu nicht ausgerechnet werden.
- Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ eine beliebige Matrix mit *schlechter* Kondition und vollem Rang. Sollte man eher die Q - R -Zerlegung oder die Normalgleichungen zum Lösen eines linearen Ausgleichsproblems mit A nehmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

(9 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$x^2 + 2y^2 - 18 = 0$$

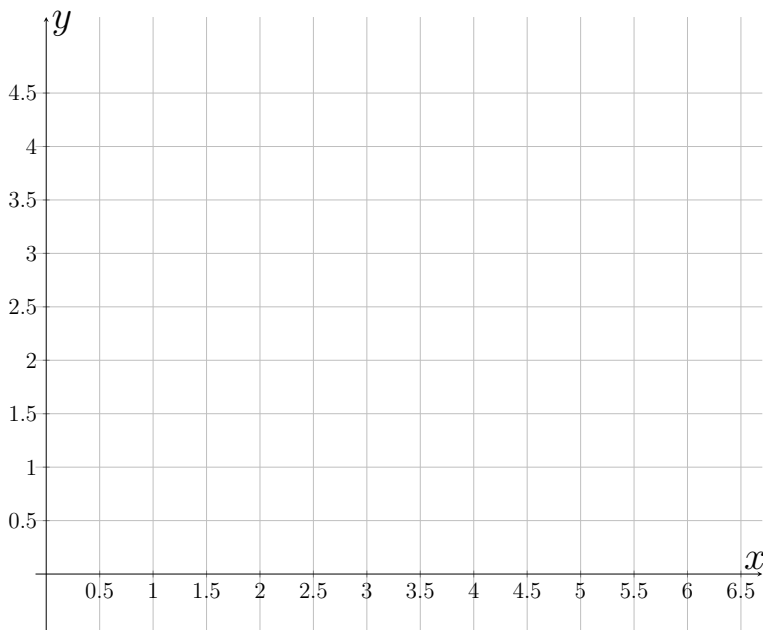
$$2xy + 3x - 7 = 0$$

- a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösung(en) im 1. Quadranten verdeutlicht. Bestimmen Sie einen *guten*, d.h. möglichst kleinen ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.
- b) Geben Sie für die in a) fixierte Lösung eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen.
- c) Eine weitere Lösung liegt in $[4, 5] \times [-1, 0]$. Für diese ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18 - 2y^2} \\ \frac{7 - 3x}{2x} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Fixpunktiteration mit Kontraktionszahl (bezüglich der ∞ -Norm) $L = 0.5$. Wieviele Schritte sind ausgehend von dem ganzzahligen Startwert $(x_0, y_0) = (4, -1)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{3}{4} \cdot 10^{-8}$ zu erzielen.

- d) Geben Sie eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an.



Aufgabe 4

(4 Punkte)

Für die Funktion F ist eine Wertetabelle gegeben.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	-2	1	3	3	2	1	1

- a) Gesucht ist eine möglichst gute Näherung für $F(1.5)$ mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades. Welche Stützstellen wählen Sie, um dieses Polynom zu bestimmen, und warum? Berechnen Sie den entsprechenden Näherungswert mit dem Neville-Aitken-Schema.
- b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil a) berechneten Näherungswert an.

Hinweis: Es gilt $|F^{(n)}(x)| \leq 2^n + 4$, für alle n und alle $x \in [-1, 5]$.

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Gegeben sei die Quadraturformel

$$Q(f) = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1) ,$$

die näherungsweise das Integral $\int_{-1}^1 f(x) dx$ berechnet.

- a) Leiten Sie die Werte für c_0 , c_1 und c_2 her, sodass die Quadraturformel mindestens den Exaktheitsgrad 2 hat.
- b) Es sei $T > 2$ gegeben. Nutzen Sie die Quadraturformel aus a) um $f(x) := \frac{4}{x^2}$ auf dem Intervall $[2, T]$ näherungsweise zu integrieren. Falls Sie in a) keine Werte herausbekommen haben, rechnen Sie allgemein mit den Konstanten c_0 , c_1 und c_2 weiter.
- c) Es sei $T > 2$ gegeben. Bestimmen Sie für die summierte Trapezregel eine geeignete Anzahl Teilintervalle n so, dass der Quadraturnfehler für das Integral $\int_2^T \frac{4}{x^2} dx$ unter $\varepsilon = 10^{-3}$ bleibt.

