

Matr.-Nr.:

Platz-Nr.:

## Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau

Prof. Dr. Arnold Reusken

Donnerstag 30. August 2018

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

### Zugelassene Hilfsmittel:

- Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.
- Ein Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv-Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.  
**ACHTUNG:** Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

**Benutzter Taschenrechner** (genaue Typenbezeichnung) : \_\_\_\_\_

Sie haben insgesamt 120 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Mittwoch, den 19. September 2018**, im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

*Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko-Blätter.*

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

**Name:** \_\_\_\_\_

**Vorname:** \_\_\_\_\_

**Unterschrift:** \_\_\_\_\_

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\Sigma$ :
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------------

Verständnisfragen-Teil

(30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

**VF-1:** Es seien  $x_{\text{MIN}}$  bzw.  $x_{\text{MAX}}$  die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie  $\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$  die relative Maschinengenauigkeit in der Menge  $\mathbb{M}(b, m, r, R)$  der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und  $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ . Ferner beschreibe  $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$  die Standardrundung.

1.	In $\mathbb{M}(2, 3, -3, 3)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{7}{64}$ .	
2.	In $\mathbb{M}(2, 5, -8, 8)$ gilt $\text{eps} = \frac{1}{32}$ .	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl $\epsilon$ mit $ \epsilon  \leq \text{eps}$ und $ \text{fl}(x) - x  =  \epsilon $ .	
4.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems in der Regel instabil.	
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 24 in $\mathbb{M}(4, 4, -8, 8)$ an.	
6.	Die Multiplikation zweier Zahlen ist stets gut konditioniert.	
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.	
8.	Es seien $x = 3$ und $y = 3 + 10^{-10}$ . Bei der Berechnung von $e^{xy} - e^y$ tritt Auslöschung auf.	
9.	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ist gut konditioniert für alle $x \in (-1, 1)$ .	
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{\text{rel}}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^3$ im Punkt $(1, 1)$ .	

**VF-2:** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beliebig aber regulär,  $b \in \mathbb{R}^n$  und gesucht sei die Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  von  $Ax = b$ .

1.	Ziel der Zeilenäquilibration ist es, ein äquivalentes Gleichungssystem zu erhalten, dessen Systemmatrix eine kleinere Konditionszahl als $A$ hat.	
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung $x^*$ und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\ x^* - \tilde{x}\ }{\ x^*\ } \leq \ A^{-1}\  \frac{\ r\ }{\ b\ }$ .	
3.	Für die Konditionszahl der Matrix $A$ gilt $\kappa(A) \geq 1$ .	
4.	Ohne Pivotisierung ist Gauß-Elimination für $A$ nicht immer durchführbar.	
5.	Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .	
6.	Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	
7.	Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $A = LR$ .	
8.	Es sei $A$ eine untere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ über Vorwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
9.	Es sei $A = LDL^T$ mit einer normierten untere Dreiecksmatrix $L$ und einer Diagonalmatrix $D$ mit nur strikt positiven Diagonaleinträgen. Dann ist $A$ symmetrisch positiv definit.	
10.	Berechnen Sie $\ A\ _1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .	

<b>VF-3:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $A = QR$ eine $QR$ -Zerlegung von $A$ , mit einer oberen Dreiecksmatrix $R$ .	
1.	Es gilt $R = Q^T A$ .
2.	Für jede orthogonale Matrix $Q$ gilt $Q^2 = I$ .
3.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.
4.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der $QR$ -Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.
5.	Es seien $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $Q_v$ die Householder Transformation bezüglich $v$ . Geben Sie $(Q_v)_{1,1}$ an.
6.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ , $v \neq 0$ , und $Q_v$ die Householder Transformation bezüglich $v$ . Es gilt $Q_{\alpha v} = Q_v$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\alpha \neq 0$ .
7.	Die Givens-Methode zur Bestimmung der $QR$ -Zerlegung ist nur durchführbar, wenn $A$ vollen Rang hat.
8.	Jede Givens-Transformation ist symmetrisch und orthogonal.
9.	Es gilt: $\ A\ _2 = \ R\ _2$ , wobei $\ \cdot\ _2$ die euklidische Norm ist.
10.	Es seien $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Givens Transformation. Geben Sie $\ Gx\ _2^2$ an.

<b>VF-4:</b> Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , mit $\text{Rang}(A) = n < m$ , und $b \in \mathbb{R}^m$ . Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$ und $\Theta$ der Winkel zwischen $Ax^*$ und $b$ . Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Dazu betrachten wir das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(\hat{x})\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ .	
1.	Die Kondition des linearen Ausgleichsproblems hängt vom Winkel $\Theta$ ab.
2.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ .
3.	Es gilt $A^T Ax^* = A^T b$ .
4.	Es gilt $b^T (Ax^* - b) = 0$ .
5.	Es seien $m = 4$ , $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie $\ Ax^* - b\ _2^2$ .
6.	Es sei $Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ , $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Dann gilt: $\ x^*\ _2 = \ b_1\ _2$ .
7.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.
8.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, so ist die Konvergenzordnung in der Regel 1.
9.	Mit einer geeigneten Wahl des im Levenberg-Marquardt-Verfahren verwendeten Parameters kann man die Konvergenzordnung der Methode vergrößern.
10.	Es seien $m = 3$ , $n = 1$ , $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie $x^*$ .

**VF-5:** Es seien  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und  $x^*$  so, dass  $\Phi(x^*) = x^*$  gilt. Für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  wird die Fixpunktiteration  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  definiert. Weiter sei  $\Phi'(x)$  die Ableitung (Jacobi-Matrix) von  $\Phi$  an der Stelle  $x$ .  
Weiterhin sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung  $U$  von  $x^*$ , es gelte  $f(x^*) = 0$  und  $f'(x^*)$  sei regulär.

1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\ x_0 - x^*\ $ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.
2.	Es seien $n = 1$ , $\Phi(x) := \frac{1}{3}x^2 - 2x$ , und $x^* = 0$ . Die Fixpunktiteration konvergiert für alle Startwerte $x_0$ mit $ x_0  \leq \delta$ und $\delta > 0$ hinreichend klein.
3.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = 2 \cos(\frac{x}{3})$ . Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ .
4.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 1.
5.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) := x^2 + x - 4$ . Geben Sie den eindeutigen negativen Fixpunkt von $\Phi$ an.
6.	Wenn das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Lösung $x^*$ von $f(x) = 0$ konvergiert, dann gilt für genügend große $k$ -Werte: $\ x_k - x^*\  \approx \ x_k - x_{k+1}\ $ .
7.	Die Newton-Methode zur Bestimmung der Lösung $x^*$ von $f(x) = 0$ ist lokal quadratisch konvergent.
8.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, den Einzugsbereich der Methode zu vergrößern.
9.	Die Bisektionsmethode ist auch in Dimension $n > 1$ ein zuverlässiges Verfahren zur Bestimmung der Lösung $x^*$ von $f(x) = 0$ .
10.	Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren zu $f(x) = x^2 - 5$ mit dem Startwert $x_0 = 5$ die zweite Iterierte $x_2$ .

**VF-6:** Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad  $n$ , das die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in den Stützstellen  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  interpoliert. Weiter seien  $\delta_n$  der führende Koeffizient dieses Polynoms und  $[x_0, \dots, x_n]f$  die dividierte Differenz der Ordnung  $n$  von  $f$ .

1.	Es gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = P(f x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .
2.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$ , $0 \leq j \leq n$ . Es gilt $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n \ell_{jn}(x)[x_0, \dots, x_j]f$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .
3.	Der Fehler $\max_{x \in [a, b]}  P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ ist minimal wenn man die Stützstellen $x_i$ äquidistant wählt.
4.	Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Polynoms $P(f x_0, \dots, x_n)$ .
5.	Es sei $f(x) = x^2$ . Bestimmen Sie den Wert $[x_0, x_1, x_2]f$ .
Es sei $f \in C^\infty([a, b])$ . Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden. Weiter sei $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ .	
6.	Bei der Gauß-Quadratur gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f x_0, \dots, x_m)(x) dx$ , wobei $P(f x_0, \dots, x_m)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu geeignet gewählten Stützstellen $x_i$ ist.
7.	Bei der Gauß-Quadratur gilt: $I_m(f) = I(f)$ falls $f$ ein Polynom vom Grad maximal $2m + 1$ ist.
8.	Bei der Gauß-Quadratur und bei den Newton-Cotes Formeln sind die Stützstellen $x_j$ unabhängig von der Funktion $f$ .
9.	Es sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$ , $j = 1, \dots, n$ , mit $t_j = a + jh$ , $h = \frac{b-a}{n}$ . Der Exaktheitsgrad der summierten Quadraturformel $I_m^n(f)$ ist größer als der von $I_m(f)$ .
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^3 dx$ mit Hilfe der Simpsonregel.



**Aufgabe 1**

(5 Punkte)

Es seien  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9\lambda & 3\lambda + 2 & 6\lambda + 1 \\ 0 & 4\lambda & 2\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die
- $LR$
- Zerlegung (ohne Pivotisierung) von
- $A$
- .

Es seien nun

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 11 \\ \frac{11}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Dabei sind  $L$  und  $R$  die Matrizen der  $LR$ -Zerlegung von  $PDB$ , d.h.  $PDB = LR$ .

- b) Berechnen Sie die Determinante von
- $B$
- .
- 
- c) Lösen Sie das Gleichungssystem
- $Bx = b$
- mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.



**Aufgabe 2**

(7 Punkte)

Die Funktion  $y(t) := (\sqrt{t} - a)^2 + \sqrt{t} - b^2$  soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

$t_i$	0.25	1	4
$y_i$	2	1	6

Bestimmen Sie die Parameter  $a$  und  $b$  näherungsweise:

- Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem  $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$ . Geben Sie  $F$  und  $x$  explizit an.
- Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert  $(a^0, b^0) = (0, 1)$  gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.
- Es sei nun  $a = b = 1$ . Geben sie für diesen Wert das Residuum des in a) aufgestellten nichtlinearen Ausgleichsproblems an.

Wir betrachten nun das linearisierte Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c^0 \\ \Delta d^0 \end{pmatrix} \right\|_2 \rightarrow \min_{(\Delta c^0, \Delta d^0)^T \in \mathbb{R}^2}$$

zum Startwert  $(c^0, d^0) = (0, 1)$ .

- Führen Sie mit Hilfe dieses linearisierten Ausgleichsproblems einen Gauß-Newton-Schritt durch. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.





**Aufgabe 3**

(8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

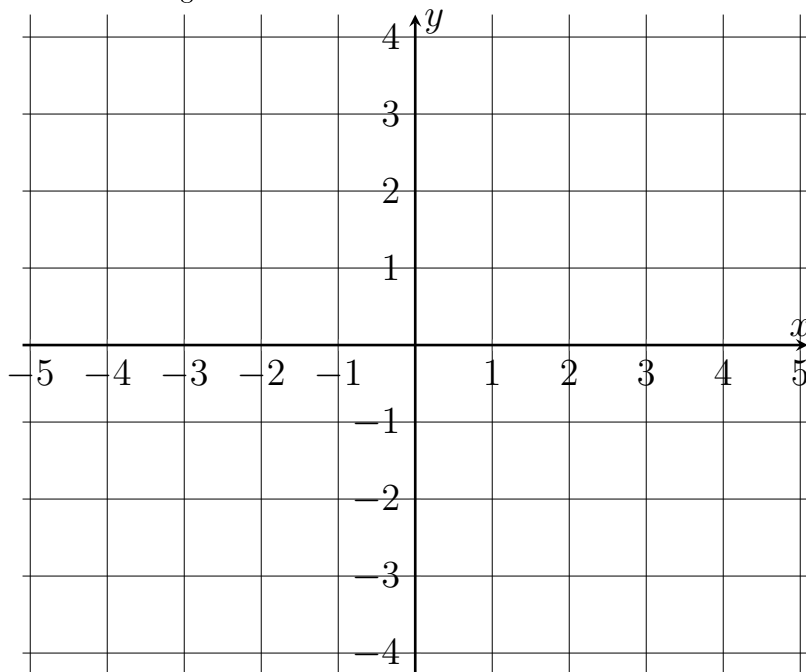
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3xy + 2 \\ x + y^2 + 2y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

- Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen mit  $x > -2$  hervorgeht, und geben Sie für jede dieser Nullstellen einen geeigneten Startwert an (Genauigkeit  $\pm 0.5$ ).
- Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 4. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

**Bem.:** Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.



**Aufgabe 4**

(5 Punkte)

Es ist die folgende Wertetabelle für eine unbekannte Funktion  $f$  gegeben

$x$	-0.30	0.10	0.50	0.90	1.30	1.70
$f(x)$	1.0453	1.0050	1.1276	1.4331	1.9709	2.8283

a) Berechnen Sie die fehlenden Werte  $P_{i,k}$  in dem folgenden Neville-Aitken-Tableau für  $f(1.0)$ :

$x_0 = -0.30$	1.0453								
$x_1 = 0.10$	1.0050	↘							
		→	0.91432						
$x_2 = 0.50$	1.1276	↘	↘						
		→	1.2808	→	1.5098				
$x_3 = 0.90$	1.4331	↘	↘	↘					
		→	1.5095	→	$P_{3,2}$	→	1.5405		
$x_4 = 1.30$	$P_{4,0}$	↘	↘	↘	↘				
		→	1.5676	→	1.5458	→	1.5439	→	$P_{4,4}$
$x_5 = 1.70$	2.8283	↘	↘	↘	↘	↘			
		→	1.3279	→	1.5376	→	$P_{5,3}$	→	1.5431
									↘

Geben Sie einen möglichst guten Näherungswert  $p_2(1.0)$  für  $f(1.0)$  basierend auf einem Polynom zweiten Grades an und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Die obigen Werte gehören zu der Funktion  $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ . Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für den Wert  $P_{4,2}$  an, ohne jedoch die Funktion  $f$  auszuwerten!



**Aufgabe 5**

(5 Punkte)

Gegeben sei die Quadraturformel

$$Q(f) = w f\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + w f\left(\frac{1}{2} + \alpha\right),$$

mit  $w \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , die näherungsweise das Integral  $\int_0^1 f(x) dx$  berechnet.

- a) Leiten Sie die Werte für  $w$  und  $\alpha$  so her, dass die Quadraturformel mindestens den Exaktheitsgrad 3 hat.

Wir betrachten nun die summierte Gaußformel mit zwei Stützstellen:

- b) Bestimmen Sie für diese Formel eine geeignete Anzahl an Teilintervallen  $n$ , so dass der Quadraturfehler für das Integral  $\int_0^1 e^{\sin(x)} dx$  unter  $\varepsilon = 10^{-3}$  bleibt.

**Hinweis:** Für  $f(x) = e^{\sin(x)}$  gilt  $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(\xi)| \leq 3i e$  für  $i = 1, 2, \dots, 5$ .









