Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau
Prof. Dr. Arnold Reusken
Mittwoch 13. März 2019

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Höchstens ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
  ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ______________________________

Sie haben insgesamt 120 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Donnerstag, dem 21. März 2019** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d.h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Es gilt $\|\text{fl}(x+y)\| \leq \|\text{fl}(x)\| + \|\text{fl}(y)\|$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$.	
2.	In $\mathbb{M}(2,4,-4,4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{32}$.	
3.	Es gilt $\|\text{fl}(x) - x\| \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
4.	Die Anzahl der Elemente in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ hängt nicht von m ab.	
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 23 in $\mathbb{M}(7,6,-8,8)$ an.	
6.	Die Funktion $f(x) = x\sin(x)$ ist gut konditioniert für $x = \frac{1}{2}\pi$.	
7.	Falls die Kondition eines Problems gut ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems automatisch stabil.	
8.	Es seien $x = 3$ und $y = 3 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	
9.	Wir betrachten die Berechnung einer Summe $S_m := \sum_{j=1}^{m} x_j$. Die Stabilität dieser Summenbildung hängt von der Reihenfolge der Summanden x_j ab.	
10.	Berechnen Sie die relative Konditionszahl der Funktion $f(x_1,x_2) = x_2 e^{x_1}$ für $(x_1,x_2) = (-2,0)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $B\,x^* = b$.	
2.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(A)$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm ist.	
3.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\,\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\\|r\\|}{\\|b\\|} \leq \\|A\\| \frac{\\|x^* - \tilde{x}\\|}{\\|x^*\\|}$.	
4.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	
5.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	
6.	Es sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Dann gilt $R\,x^* = Q^T b$.	
7.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $R\,y = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{2}n$ Operationen.	
8.	Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	
9.	Falls die Matrix A orthogonal ist, gilt $\kappa_2(A) = 1$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der euklidischen Norm ist.	
10.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\\|D\\|_2$.	

VF-3:		
1.	Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung.	
2.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung der positiv definiten Matrix A. Dann ist $A^{-1} = L^{-T}D^{-1}L^{-1}$ die Cholesky-Zerlegung der Matrix A^{-1}.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen (gem. Vorlesung).	
4.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^T = Q$.	
5.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\det(A^2)$ an.	
6.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Es gilt: $Q_v^{-1} = Q_v$.	
7.	Das Produkt zweier Householder-Transformationen ist eine Spiegelung.	
8.	Das Produkt zweier Givens-Transformationen ist eine Rotation.	
9.	Eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert nur dann, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	
10.	Es seien $v, x \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\\|Q_v x\\|_2^2$ an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ferner seien $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \\|A\,x - b\\|_2$ die eindeutige Minimalstelle und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b. Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\\|F(\hat{x})\\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \\|F(x)\\|_2$.

1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Kondition des linearen Ausgleichsproblems.	
2.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	
3.	Es gilt $\tilde{R}\,x^* = Q\,b$.	
4.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der euklidischen Norm ist.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\\|A\,x^* - b\\|_2$.	
6.	Es sei $L\,D\,L^T = A^TA$ die Cholesky-Zerlegung von A^TA. Dann gilt $x^* = L^{-T}D^{-1}L^{-1}A^Tb$.	
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist die Konvergenzordnung in der Regel zwei.	
9.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren kann den Einzugsbereich der Methode erweitern.	
10.	Es seien $m = 3$, $n = 1$ und $Q\,b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\\|A\,x^* - b\\|_2$.	

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	
2.	Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$, ist die Fixpunktiteration nicht lokal konvergent.	
3.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$. Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	
5.	Es sei $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annährung einer Nullstelle dieser Funktion, mit Startwerten $x_0 = -2$, $x_1 = 0$. Berechnen Sie x_2.	
6.	Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei Φ so, dass $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ dem Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle x^* entspricht. Es gilt $\Phi'(x^*) = 0$.	
7.	Es sei $f(x) = x^3 - 7$. Die Bisektionsmethode zur Bestimmung der Nullstelle von f konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 \in (-\infty, 1]$, $x_1 \in [2, \infty)$.	
8.	Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren, stetigen Funktion f konvergiert nur dann, wenn die Startwerte x_0 und x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	
9.	Es sei $f(x) = x^2 - 2$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x^*)) \neq 0$. Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Geben Sie den Wert für p so an, dass $\|x^* - x_k\|_\infty \approx \|x_{k+1} - x_k\|_\infty^p$ für k hinreichend groß gilt.	

VF-6: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt $P(Q \,|\, x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	
2.	Es gilt $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \,|\, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
3.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$, $0 \leq j \leq n$. Es gilt $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} \ell_{jn}(x)[x_0, \ldots, x_j]f$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
4.	Es gilt $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
5.	Es seien $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Berechnen Sie δ_2.	

Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

6.	Es seien $I_m^{NC}(f)$ und $I_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauß-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $I_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $I_m^G(f)$.	
7.	Der Exaktheitsgrad der summierten Quadraturformel $I_m^n(f)$ ist größer als der von $I_m(f)$.	
8.	Es sei $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom. Bei der Gauß-Quadratur gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \,|\, x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$.	
9.	Es sei $I_1(f)$ die Trapezregel. Es gilt $\|I_1^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^1 6\, x^4\, dx$ mit Hilfe der Simpsonregel.	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L, R und P explizit an.

Es seien nun

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 \\ 3.5 & 5.25 & 7.75 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von $\tilde{P}DB$, d.h. $\tilde{P}DB = \tilde{L}\tilde{R}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Bx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

c) Wir nehmen nun an, dass die rechte Seite b und die Matrix B nur in gestörter Form vorliegen. Dabei wissen wir, dass der abolute Fehler $\|\Delta b\|_\infty$ mit $2.5 \cdot 10^{-4}$ nach oben beschränkt werden kann. Wie groß darf die Störung in B, gemessen in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls gemessen in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht größer als zwei Prozent ist? Dabei darf verwendet werden, dass $\|B^{-1}\|_\infty = 11$ ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Funktion $y(t) := a\sin(t) + \tan(bt) - t$ soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
y_i	2	4	3

Bestimmen Sie die Parameter a und b näherungsweise:

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert $(a^0, b^0) = (0, 0)$ gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.

Wir betrachten nun das lineare Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 0 & 8 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(c,d)^T \in \mathbb{R}^2} .$$

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit dem Householder-Verfahren und geben Sie die Norm des Residuums an.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(x-1)^2}{6} + \dfrac{(y-1)^2}{6} + \dfrac{x\,y}{18} \\ \dfrac{x-y+2}{2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,2] \times [0,2]$ erfüllt sind.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x^0, y^0) := (0,\ 0)$ zwei Fixpunktschritte durch, d. h. berechnen Sie (x^2, y^2).

Hinweis: Sollten Sie in a) keine Kontraktionszahl L gefunden haben, verwenden Sie im Folgenden die 1-Norm und $L = \dfrac{e}{\pi}$.

c) Geben Sie eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x^2, y^2) an.

d) Wie viele Iterationsschritte/Fixpunktschritte sind ausgehend vom Startwert $(x^0, y^0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 2.4 \cdot 10^{-3}$ anzunähern? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert an.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zur Berechnung der Funktion $f(x) = \cos(x)$ steht die folgende Tabelle zur Verfügung

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$\sin(x)$	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$\cos(x)$	1	0.9689	0.8776	0.7317	0.5403

Die Funktion soll durch ein Polynom p zweiten Grades angenähert werden.

a) Zeigen Sie, ohne das Polynom p zu bestimmen und der ausschließlichen Verwendung von Tabellenwerten für Sinus- und Kosinuswerte, dass die Stützstellen so gewählt werden können, dass für den Interpolationsfehler in $x = 0.1$ gilt:

$$|f(0.1) - p(0.1)| \leq 2.2 \cdot 10^{-4}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\cos(x) = \cos(-x)$.

b) Bestimmen Sie nun das Polynom p zu den in a) bestimmten Stützstellen in Newton-Darstellung. Sollten Sie keine Stützstellen bestimmt haben, verwenden sie $x_0 = 0, x_1 = 0.25$ und $x_2 = 0.5$.
Werten Sie dann die Newton-Darstellung mit dem Horner-Schema an der Stelle $x = 0.1$ aus.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei die Quadraturformel

$$Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{2}{3}\right) ,$$

die näherungsweise das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ bestimmt.

a) Zeigen Sie, dass der Exaktheitsgrad der Quadraturformel kleiner 2 ist.

b) Es sei $a > 0$ gegeben. Nutzen Sie die Quadraturformel um $f(x) := \dfrac{2}{9x^2+1}$ auf dem Intervall $[0, a]$ näherungsweise zu integrieren.

c) Das Intervall $[0, 1]$ wird in n Teilintervalle der Länge $h = \frac{1}{n}$ unterteilt, $t_k = hk$, $k = 0, \ldots, n$. Geben Sie die entsprechende summierte Quadraturformel Q_n an.
Hinweis: Wie lautet die Quadraturformel Q angepasst auf das Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$?