Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik im Maschinenbau

Prof. Dr. Arnold Reusken

Freitag 30. August 2019

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Höchstens ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt.*
  ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ____________________

Sie haben insgesamt 120 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Montag, dem 16. September 2019** im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d.h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := \text{fl}(\text{fl}(x) - \text{fl}(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen.

1.	Es gilt $x_{\text{MAX}} = (1 - b^{-m})b^R$.	
2.	In $\mathbb{M}(2,4,-4,4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{31}$.	
3.	Die Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ ist endlich.	
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le$ eps und $\text{fl}(x) - x = \epsilon$.	
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 17 in $\mathbb{M}(3,8,-8,8)$ an.	
6.	Es gilt $\frac{\lvert(x \ominus y) - (x-y)\rvert}{\lvert x-y\rvert} \le$ eps für alle $x, y \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ mit $x \ne y$.	
7.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, wird jede Störung der Eingabedaten viel verstärkt.	
8.	Es seien $x = 5$ und $y = 5 - 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $\sin(x) - \sin(y)$ tritt Auslöschung auf.	
9.	Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für alle $x \ge 3$.	
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = x^2\cos(y)$ im Punkt $(1,0)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_2(B) \le \kappa_2(A)$, mit $\kappa_2(A) := \lVert A\rVert_2 \lVert A^{-1}\rVert_2$.	
2.	Wir betrachten das gestörte Problem $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$. Es gilt $\frac{\lVert b-\tilde{b}\rVert}{\lVert b\rVert} \le \kappa(A)\frac{\lVert x^*-\tilde{x}\rVert}{\lVert x^*\rVert}$, mit $\kappa(A) := \lVert A\rVert \lVert A^{-1}\rVert$.	
3.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$.	
4.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	
5.	Berechnen Sie $\lVert A\rVert_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.	
6.	Eine LR-Zerlegung $P\,A = L\,R$ kann man verwenden, um A^{-1} zu bestimmen.	
7.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $Ry = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa n^2 Operationen gem. Vorlesung.	
8.	Es sei A symmetrisch positiv definit. Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ is eine stabiles Verfahren.	
9.	Es sei A symmetrisch positiv definit. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen gem. Vorlesung.	
10.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung von A.		
1.	Es existiert immer eine $Q\,R$-Zerlegung von A.	
2.	Für jede orthogonale Matrix gilt Q gilt $Q^T = Q$.	
3.	Es seien $m = n$ und $\det(A) \neq 0$. Dann gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q)$, wobei $\kappa_2(.)$ ie Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	
4.	Es seien $m = n$, $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $A\,x = b \Leftrightarrow x = R^{-1}Q^T b$.	
5.	Es seien $v, x \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\\|Q_v x\\|_2$ an.	
6.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der QR-Zerlegung ist immer stabil.	
7.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	
8.	Es seien Q_v die $m \times m$ - Householder-Transformation bezüglich v und $x \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Dann gilt $\\|Q_v x\\|_\infty = \\|x\\|_\infty$.	
9.	Das Produkt zweier Givens-Transformationen ist eine orthogonale Matrix.	
10.	Es sei Q_v eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix Q_v an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \\|A\,x - b\\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b. Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Dazu betrachten wir das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\\|F(\hat{x})\\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \\|F(x)\\|_2$.		
1.	Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit.	
2.	Es gilt $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \\|A\,x - b\\|_2 \Leftrightarrow Q\,A\,x^* = Q\,b$.	
3.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	
4.	Es sei $Q\,b =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ.	
6.	Die Matrix R kann man über Householder-Transformationen bestimmen.	
7.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\hat{x}$.	
8.	Mit einer geeigneten Wahl des im Levenberg-Marquardt-Verfahren verwendeten Parameters kann man die Konvergenzordnung der Methode vergrößern.	
9.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode ist in der Regel 1.	
10.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Q\,b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\\|Ax^* - b\\|_2$.	

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.
Weiterhin sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0,\ f'(x^*) \neq 0$. Für das Intervall $[a, b]$ gilt, dass $a < x^* < b$, wobei x^* die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$ ist.

1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist höchstens 2.	
3.	Das Gauss-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$. Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	
5.	Es sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge: $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$. Geben Sie den Wert für p an, sodass $x^* - x_k \approx (x_{k+1} - x_k)^p$ für k hinreichend groß gilt.	
6.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) := 2e^{-\frac{1}{2}x}$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.	
7.	Das Bisektionsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f konvergiert, wenn man die Startwerte $x_0 = a$ und $x_1 = b$ wählt.	
8.	Sei f konvex auf $[a, \infty)$, d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \geq a$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert gegen x^* für jeden Startwert $x_0 \geq a$.	
9.	Es seien $\Phi(x) = x - f(x)$ und x^* die Nullstelle von f in $[a, b]$. Dann gilt $\Phi'(x^*) = 0$.	
10.	Es seien $[a, b] = [0, 2]$ und $f(x) = x^3 - 1$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annährung einer Nullstelle dieser Funktion, mit Startwerten $x_0 = 0,\ x_1 = 2$. Berechnen Sie x_2.	

VF-6: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f\,|\,x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f\,|\,x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
2.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, $0 \leq j \leq n$. Es gilt $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x)\ell_{jn}(x_j)\ \forall x \in \mathbb{R}$.	
3.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f\,|\,x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	
4.	Es sei f ein Polynom vom Grad maximal n. Dann gilt: $f(x) = P(f\,|\,x_0, \ldots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
5.	Es seien $f(x) = 4x^2 - 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Berechnen Sie δ_2.	

Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden.
Es sei $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

6.	Die Exaktheitsgrade der Quadraturformel $I_m(f)$ und der summierten Quadraturformel $I_m^n(f)$ sind gleich.	
7.	Es gibt Stützstellen x_j, $0 \leq j \leq m$, sodass mit dem Lagrange–Interpolationspolynom $P(f\,|\,x_0, \ldots, x_m)$ bei der Gauß-Quadratur gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f\,|\,x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	
8.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Stützstellen x_j, $0 \leq j \leq m$, von der Funktion f ab.	
9.	Es sei m fest gewählt. Der Fehler $\|I_m(f) - I(f)\|$ ist bei einer Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei einer Newton-Cotes Formel.	
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_1^3 x^3$ mit der summierten Trapezregel $I_1^2(f)$.	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0.4 \\ 0.4 & -0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A **mit Spaltenpivotisierung**, d. h. $PA = LR$, in **zweistelliger** Gleitpunktarithmetik (**Runden Sie nach jeder Rechenoperation!**).
Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

Es seien nun

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0.79 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0.4 & 1 & 0.54 \\ 0 & 0.39 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.71 \\ 1.3 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von B, d.h. $B = \tilde{L}\tilde{R}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Bx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen in **zweistelliger** Gleitpunktarithmetik.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben sind die Punkte

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & -3 & -1 & 2 \\ \hline y_i & -5 & -6 & 4 \end{array},$$

die gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve zu

$$y(x) = \alpha 2^{|x|} + \beta \frac{1}{2}(x^2 + x) + 2$$

liegen.
Zu bestimmen sind die optimalen Parameter α und β im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$. Geben Sie A, x und b explizit an.

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 29 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe von Householder-Transformationen. Wie groß ist das Residuum?
Hinweis: Givens-Rotationen oder der Ansatz über Normalengleichungen werden mit 0 Punkten bewertet.

c) Wie groß darf der absolute Fehler von c, gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm, höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm, nicht größer als ein Prozent ist?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y^2 + 2\,y + x &= 4 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} &= \frac{33}{4} \end{aligned}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

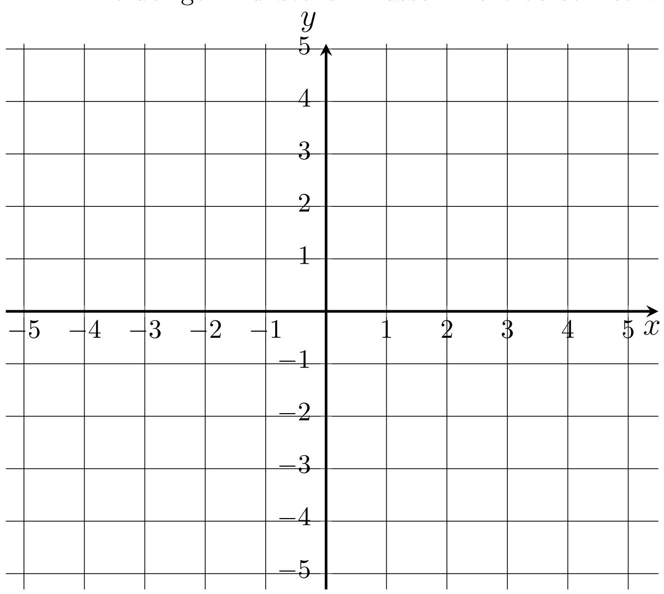
a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 2. Quadranten für beide Verfahren

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.



Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline f(x_i) & 4 & 3 & -1 & 3 \end{array}.$$

a) Berechnen Sie die **drei** fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema und stellen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0,x_1,x_2,x_3)(x)$ in der **Newton-Darstellung** auf.

$$\begin{array}{r|ccccccc} x_0=-1 & 4 & & & & & & \\ & & \searrow & & & & & \\ x_1=0 & 3 & \to & [x_0,x_1]f & & & & \\ & & \searrow & & \searrow & & & \\ x_2=2 & -1 & \to & [x_1,x_2]f & \to & 1 & & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ x_3=3 & 3 & \to & 4 & \to & [x_1,x_2,x_3]f & \to & 0.25 \end{array}$$

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|P(f|x_0,x_1,x_2,x_3)(\hat{x})-f(\hat{x})|$ an der Stelle $\hat{x}=1$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von f gelte: $\max_{x\in[-1,3]}|f^{(n)}(x)| \le \frac{8\cdot(n-1)^2}{n!}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Es sei nun das folgende Newton-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc} i & y_i & [y_i]g & & [y_{i-1},y_i]g & & [y_{i-2},y_{i-1},y_i]g & & [y_{i-3},y_{i-2},y_{i-1},y_i]g \\ \hline 0 & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & \searrow & & & & & \\ 1 & 0 & -1 & \to & -1 & & & & \\ & & & \searrow & & \searrow & & & \\ 2 & 1 & 6 & \to & 7 & \to & 4 & & \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 3 & 6 & -49 & \to & -11 & \to & -3 & \to & -1 \end{array}$$

c) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(g|y_0,y_1,y_2,y_3)(y)$ mithilfe des **Horner-artigen Schemas** an der Stelle $\hat{y}=0.5$ aus.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(\cos(x^2))$. Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

die um höchstens $\varepsilon = 0.03$ von der exakten Lösung abweicht.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Unterteilungen, die dafür mit der **summierten Trapezregel** notwendig ist.

b) Wie viele Unterteilungen wären mit der summierten Gaußformel mit 2 Stützstellen pro Intervall notwendig?

Hinweis: Für $x \in [0,1]$ gilt $|f^{(n)}(x)| \leq (n+1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.