Entwurf zum neuen Klausurformat

Die Aufgaben der Klausur F20 sind leicht abgeändert und teilweise erweitert in 24 Teilaufgaben zerlegt worden. Im Prinzip ändert sich sehr wenig. Es werden nur nach kleinen Schritten von maximal 2 Punkten neue Zwischenwerte / Teilergebnisse angegeben, mit denen dann weiter gerechnet wird. Da genau eines der vorgegebenen Ergebnisse richtig ist, kann man zudem die eigenen Ergebnisse konrollieren.

Außer der Aufgaben 3f), 4d) und 5b) mit 2 Punkten, gibt es für alle übrigen Aufgaben je einen Punkt. Insgesamt ergibt diese Klausur somit erst 27 Punkte.

Es können auch kleine Passagen im alten Format dran kommen; z.B. Skizzen oder Nachweise.

Kreuzen Sie hier die von Ihnen hinten gefundenen Lösungen an.

Nr	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1a)										
1b)										
1c)										
1d)										
1e)										
2a)										
2b)										
2c)										
2d)										
2e)										
3a)										
3b)										
3c)										
3d)										
3e)										
3f)										
4a)										
4b)										
4c)										
4d)										
5a)										
5b)										
5c)										
5d)										

Aufgabe 1
Zu lösen ist das Gleichungssystem $A\,x = b$. Dazu seien die $L\,R$-Zerlegung von A, d.h. $A = L\,R$, und die rechte Seite b gegeben:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1a) Berechnen Sie y zu $L\,y = b$ durch Vorwärtseinsetzen und geben Sie y_4 an:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$y_4 =$	2	6	0	3	1	8	-1	-2	5	-3

1b) Eine andere rechte Seite ergibt $y = (2, 0, 3, 0)^T$ (hier noch gleich). Berechnen Sie die Lösung x zu diesem y durch Rückwärtseinsetzen und geben Sie x_1 an:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$x_1 =$	2	6	0	3	1	8	-1	-2	5	-3

1c) Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\det(A) =$	40	6	8	10	50	60	56	12	16	32

1d) Schätzen Sie $||A||_1$ (möglichst gut nach oben) ab, ohne A explizit zu berechnen:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\|A\|\|_1 \leq$	40	6	8	10	50	60	56	12	16	32

1e) Es gelte $\kappa_\infty(A) = 40$. A sei ungestört und $\tilde{b}$ ein Störung von b, die bei Rundung auf ganze Zahlen obiges b ergibt. Schätzen Sie den relativen Fehler r_x der Lösung $\tilde{x}$ gegenüber x (möglichst gut nach oben) ab:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$r_x \leq$	1.08484	2.15203	1.35120	1.06827	2.8571	0.56688	1.09638	3.36450	1.61006	0.70565

Aufgabe 2

Die Funktion $y(t) := \alpha \sin(t) + \beta \cos(t) - 1$ soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0	$\pi/2$	π
y_i	2	4	3

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

2a) Bestimmen Sie zu dem entsprechenden linearen Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ die Matrix $A = (A_{ij})$ und den Vektor $b = (b_i)$ Geben Sie $\sum A_{ij} + \sum b_i$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum A_{ij} + \sum b_i =$	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

2b) Die Givensrotation zur Elimination von B_{21} überführt $(B|c)$ in $(B^{(1)}|c^{(1)})$. Berechnen Sie $(B^{(1)}|c^{(1)})$ und geben Sie $s^{(1)} = \sum B_{ij}^{(1)} + \sum c_i^{(1)}$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$s^{(1)} =$	-9	-7	-6	0	7	9	11	13	15	37

2c) Für ein anderes System mit $\tilde{B}$ und $\tilde{c}$ ergab die erste Givens-Rotation (hier noch gleich)

$$(\tilde{B}^{(1)}|\tilde{c}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 5 & | & 13 \\ 0 & | & 1 \\ -12 & | & -13 \end{pmatrix}$$

Die Givensrotation zur Elimination von $\tilde{B}_{31}^{(1)}$ überführt $\tilde{B}^{(1)}|\tilde{c}^{(1)}$ in $\tilde{B}^{(2)}|\tilde{c}^{(2)}$. Berechnen Sie $(\tilde{B}^{(2)}|\tilde{c}^{(2)})$ und geben Sie $\tilde{s}^{(2)} = \sum \tilde{B}_{ij}^{(2)} + \sum \tilde{c}_i^{(2)}$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\tilde{s}^{(2)} =$	-9	-7	-6	0	7	9	11	23	25	38

Für ein drittes System mit $\hat{B}$ und $\hat{c}$ ergaben Givens-Rotationen

$$(\hat{B}^{(n)}|\hat{c}^{(n)}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & | & 13 \\ 0 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Łösen Sie das Ausgleichsproblem $\hat{x}^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|\hat{B}\,\hat{x} - \hat{c}\|_2$.

2d) Geben Sie $\hat{x}_1^*$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\hat{x}_1^* =$	0	1	2	3	5	13	6	-1	2.6	1.4241

2e) Geben Sie das Residuum an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\|\hat{B}\,\hat{x}^* - \hat{c}\|\|_2 =$	0.5	1	3	5	7	9	11	13	15	2

Aufgabe 3
Gegeben sei die Funktion

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(e^x\, e^{-y} + \ln(x+1)\right) \\ \frac{1}{8}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2\right) \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: Für $D = [0,1] \times [0,2]$ gilt $F(D) \subset \tilde{D} = I_x \times I_y$. Bestimme ein möglichst kleines $\tilde{D}$. Benutzen Sie dazu keine Ableitungen, sondern schätzen Sie die einzelnen Terme (Faktoren, Summanden), die nur von x bzw. y abhängen, nach oben und unten ab.

3a) Geben Sie I_x an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_x =$	$[0.022556, 0.56857]$	$[0, 0.56857]$	$[0,1]$	$[0.022556, 1]$	$[0, 0.8]$	$[0, 0.5]$	$[0.1, 0.59]$	$[0, 2]$	$[0.3, 0.7$	$[0.2, 0.8]$

3b) Geben Sie I_y an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_y =$	$[0, 2]$	$[0, 0.37993]$	$[0,1]$	$[0.022556, 1]$	$[0, 0.8]$	$[0, 0.5]$	$[0.1, 0.59]$	$[0, 1.1]$	$[0.3, 0.7$	$[0.2, 0.8]$

Es gilt nun

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(e^x\, e^{-y} + \ln(x+1)\right)) \\ \frac{1}{8}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2\right) \end{pmatrix} \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(e^x\, e^{-y} + \frac{1}{x+1}\right) & -\frac{e^x\, e^{-y}}{6} \\ \frac{1}{16}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & \frac{y}{4} - \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

3c) D ist **konvex** und F ist stetig differenzierbar. Wir dürfen die Kontraktivität also durch Abschätzung einer Norm auf D nachweisen.
Bestimmen Sie eine möglichst kleine Kontraktionszahl L, indem Sie wie oben alle einzelnen Komponenten, die nur von x bzw. y abhängen betragsmäßig nach oben abschätzen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$L =$	0.5	0.83198	0.61950	0.96033	0.75	0.80230	0.66656	0.9	0.85305	0.90885

Ab nun sei $L = 0.9$.
3d) Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $\mathbf{x}_0 = (0,0)^T$ die erste Iterierte $\mathbf{x}_1$ und damit $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1 =$	0.02	0.16667	0.39934	0.11205	0.18667	0.44280	0.70565	0.34655	0.1	0.25

3e) Zu einem anderen Startwert erhält man $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1 = 0.186667$. (hier noch gleich) Wieviele Iterationen n sind, für diesen Startwert mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um bezüglich der 1-Norm eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$n =$	61	21	12	50	39	49	139	51	59	55

3f) Die erste Iterierte sei $\mathbf{x}_1 = (0.16667, 0.02)^T$ (hier noch gleich). Geben Sie für die zweite Iterierte der Fixpunktiteration eine möglichst gute a-posteriori Fehlerabschätzung an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\lVert\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\rVert_1 \leq$	0.060472	0.91744	0.9	0.42141	0.75537	0.35071	0.25032	0.54425	0.96436	0.60952

Aufgabe 4

Für die Funktion F ist eine Wertetabelle gegeben

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline F(x) & 2 & 1.5 & 3.5 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}.$$

Der Funktionswert $F(\bar{x} = -0.75)$ soll mithilfe eines Polynoms zweiten Grades möglichst gut angenähert werden.

4a) Wählen Sie geeignete Stützstellen (Knotenpolynom-Anteil am Fehler) $x_0, \dots x_n$ für diese Annäherung und geben Sie den Knotenpolynom-Anteil am Fehler $e_{KP} := \prod_{i=0}^{n} |\bar{x} - x_i|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$e_{KP} =$	1	0.25	3.6094	0.32812	0.23438	0.70312	0.75	0.90234	0.41016	0.52734

Berechnen Sie die fehlenden Werte im folgenden Neville-Aitken Tableau:

$$\begin{array}{c|ccccccc} x_i & P_{i,0} & & P_{i,1} & & P_{i,2} & & \\ \hline -2 & 1.5 & & & & & & \\ & & \searrow & & & & & \\ -1 & 3.5 & \rightarrow & 4 & & & & \\ & & \searrow & & \searrow & & & \\ 0 & 3 & \rightarrow & 3.375 & \rightarrow & P_{2,2} & & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 1 & 0 & \rightarrow & 5.25 & \rightarrow & 3.6094 & \rightarrow & P_{3,3} \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 2 & 2 & \rightarrow & -3.5 & \rightarrow & P_{4,2} & \rightarrow & P_{4,3} \end{array}$$

4b) Geben Sie $P_{3,3}$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$P_{3,3} =$	3.1833	4.0195	3.3376	3.9520	3.6194	3.0803	3.6904	3.6305	4.3809	3.6094

4c) Geben Sie $P_{4,3}$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$P_{4,3} =$	3.1833	4.0195	3.3376	3.9520	3.6194	3.0803	3.6904	3.6305	4.3809	4.8868

4d) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung Err für $P_{2,2}$ an.

Hinweis: Für alle $n \geq 2$ und alle $x \in [-3, 3]$ gilt: $|F^{(n)}(x)| \leq \frac{n^2-1}{2}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$Err \leq$	0.37180	0.32418	0.15625	0.11067	0.32323	0.23963	0.12706	0.36518	0.37026	0.32919

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f(x) := \exp(\cos(x^2))$. Gesucht sind numerische Approximationen des Integrals $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

5a) I_0^4: Bestimmen Sie eine Approximation mit der **summierten Mittelpunktsregel** mit $n = 4$ Unterteilungen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_0^4 =$	4.5737	5.1448	4.2290	5.0889	4.4873	4.6112	5.0431	3.7824	3.6516	4.3953

5b) Bestimmen Sie für die **summierte Trapezregel** eine geeignete Anzahl an Teilintervallen n, so dass der Quadraturfehler höchstens $\varepsilon = 0.4$ beträgt.

Hinweis: Für $x \in [-1, 1]$ gilt: $|f'(x)| \leq 4$, $|f^{(2)}(x)| \leq 6$, $|f^{(3)}(x)| \leq 30$ und $|f^{(4)}(x)| \leq 120$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5c) I_1^4: Führen Sie die Berechnung der **summierten Trapezregel** für $n = 4$ Teilintervalle durch.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_1^4 =$	4.5737	4.8525	4.2290	5.0889	4.4873	4.6112	5.0431	3.7824	3.6516	4.3953

5d) I_2^2: Bestimmen Sie eine Approximation mit der **summierten Simpson-Regel** mit $n = 2$ Unterteilungen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_2^2 =$	4.5737	4.8525	4.2290	5.0889	4.4873	4.6112	5.0431	4.9917	3.6516	4.3953