Erlaubte Hilfsmittel:

- Formelsammlung des Sommersemesters 2020
- Taschenrechner, der auf der Positivliste steht
  (**Genaue Bezeichnung bitte auf dem ersten Blatt notieren**)
- Schreibgerät (Stifte und Geodreieck / Lineal)

Aufgabe 1 $2+1+1+2+1=7$ Punkte

Gegeben sei das Problem der Auswertung der Funktion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zur Lösung des Problems betrachten wir die Algorithmen:

$$\begin{aligned} &\text{(A1)} \quad y_1 := x^2,\ y_2 := 1 + y_1,\ y_3 := 1/y_2,\ y_4 := 1 - y_3, \\ &\text{(A2)} \quad y_1 := x^2,\ y_2 := 1 + y_1, y_3 := y_1/y_2. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition das Problems für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Ist das Problem gut konditioniert? Geben Sie eine Begründung.

c) Gegeben sei der Eingabewert x, der mit einem relativen Fehler von 5% behaftet ist. Welcher relativer Fehler ist in der Ausgabe in erster Näherung zu erwarten?

d) Betrachten Sie die beiden Algorithmen (A1) und (A2). Sind diese Algorithmen stabil? Geben Sie eine Begründung.

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kondition eines Problems und der Stabilität eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems?

Aufgabe 2 $3+6=9$ Punkte

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -90 \\ -11 & 0 & 9 \\ 88 & -11 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -10.5 \\ -2.4 \\ 28.7 \end{pmatrix}.$$

a) Jede Komponente von b sei mit einem relativen Messfehler von $0.5 \cdot 10^{-3}$ behaftet; die Matrix A sei ungestört. Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) müssen Sie rechnen?

   Hinweis: $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.72$.

b) Lösen Sie $A\,x = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmethik durch Gaußelimination **mit** Skalierung (Zeilenequilibrierung) und **mit** Spaltenpivotisierung.

Aufgabe 3 $3+1+1+2=7$ Punkte

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 8-\alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 24 - 2\,\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix L und Diagonalmatrix D, so dass $A = L\,D\,L^T$ gilt.

b) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

c) Bestimmen Sie die Determinante von A mit der in a) berechneten $L\,D\,L^T$-Zerlegung.

d) Lösen Sie $A\,x = b$ mittels der Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ aus a).

Aufgabe 4 $2+3+3+2=10$ Punkte

Gegeben seien die Daten

t_i	-1	0	1	2
y_i	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5

Theoretischen Überlegungen zufolge genügen diese der Darstellung (Modellfunktion)

$$y(t) = \alpha + \beta\, t^2.$$

Zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems verwenden wir die $Q\,R$-Zerlegung und benutzen dabei Householder–Spiegelungen.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ auf. Geben Sie A, x und b explizit an.

b) Führen sie den 1. Schritt zur Eliminierung der Elemente unterhalb der Diagonalen in der ersten Spalte explizit durch: $\left(A^{(0)}|b^{(0)}\right) = (A|b) \rightarrow \left(A^{(1)}|b^{(1)}\right)$.
(**Hinweis:** Das Ergebnis darf ausnahmsweise Brüche enthalten.)

c) Andere Messungen (Daten) mit der selben Modellfunktion führen nach zwei Spiegelungen auf

$$\left(A^{(2)}|b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -4.4721 & | & -6.261 \\ 0 & 3.7417 & | & 4.1426 \\ 0 & 0 & | & -0.2648 \\ 0 & 0 & | & -0.18597 \\ 0 & 0 & | & -0.18597 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie x^* und das Residuum. Geben Sie die Modellfunktion explizit an.

d) Lineare Ausgleichsprobleme $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$, mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\operatorname{Rang}(A) = n$, kann man sowohl über eine QR-Zerlegung (mittels Householder-Spiegelungen oder Givens-Rotationen), als auch über die Normalgleichungen (mittels Cholesky-Verfahren) lösen. Welche der beiden Vorgehensweisen liefert im Allgemeinen ein stabileres Verfahren? Erklären Sie den Grund dafür.

Aufgabe 5 $3+2+2+1=8$ Punkte

Die Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} - \sin(x_2) \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2)^T,$$

besitze in $D := [0,1] \times [0,1]$ genau eine Nullstelle x^* (kein Beweis nötig).

a) Geben Sie die Iterationsfunktion Φ des Newton-Verfahrens $x^{k+1} = \Phi(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots$, zur Bestimmung von Näherungen der Nullstelle x^* explizit an.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^0 = (1, \frac{1}{2}\pi)^T$ eine Iteration des Newton-Verfahrens durch (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

c) Erläutern Sie die Funktionsweise des Newton-Verfahrens im eindimensionalen Fall anhand einer Skizze.

d) Welche Konvergenzordnung besitzt das Newton-Verfahren im Allgemeinen? Ist die Konvergenz im Allgemeinen lokal oder global? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 $3 + 3 + 2 = 8$ Punkte

Auf dem Intervall $[0, 0.5]$ betrachten wir das Fixpunktproblem

$$x = \tfrac{1}{2}e^{-x^2}.$$

a) Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen-Fixpunktsatzes explizit nach. (Begründen Sie Ihre Aussagen; ansonsten gibt es keine Punkte.)

b) Führen Sie ausgehend von einem geeigneten Startwert x_0 (dieser ist auf eine Nachkommastelle zu runden) zwei Schritte des Fixpunktverfahrens durch, und geben Sie dann eine a–posteriori–Fehlerschätzung an.

c) Erläutern Sie anhand einer Skizze, dass bei diesem Problem die Fixpunktiteration global konvergiert.

Aufgabe 7 $3 + 2 = 5$ Punkte

Die Funktion $f(x) = \sin 2x$ ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.1	0.2	0.3
$\sin 2x$	0.0	0.1987	0.3894	0.5646

a) Berechnen Sie einen Näherungswert für $f(0.15)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte.

b) Bestimmen Sie für den berechneten Wert eine möglichst gute Fehlerschranke.

Aufgabe 8 $4 + 2 = 6$ Punkte

Zur Bestimmung des Integrals $I = \int_a^b f(x)\,dx$ sei folgende Quadraturformel mit 2 Stützstellen gegeben ($H = b - a$):

$$I \approx I_2(f) = \frac{H}{2}\left[f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)H\right) + f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)H\right)\right]. \qquad (1)$$

Der Fehler dieser Formel ist gegeben durch

$$E_2(f) = I - I_2(f) = \frac{H^5}{4320} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (a, b). \qquad (2)$$

a) Leiten Sie für die Quadraturformel (1) die summierte Formel für n Teilintervalle mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ her und geben Sie für diese eine Fehlerabschätzung unter Benutzung von (2) an.

b) Wie viele Teilintervalle sind höchstens erforderlich, um mit der in a) aufgestellten Formel das Integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ bis auf einen Fehler von maximal $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ zu bestimmen?