Aufgabe 1 (4 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben ist das Problem

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad x \in (0, \infty).$$

a.) Wie ist die Kondition des Problems ? Ist sie gut oder schlecht (mit Begründung!) ?

b.) Gegeben sei der Algorithmus

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + x \\ y_2 &= \frac{1}{y_1}. \end{aligned}$$

Ist dieser Algorithmus stabil ? Begründen Sie Ihre Antwort.

c.) Wenn allgemein ein Problem eine Kondition von der Größenordnung 10^4 hat und man mit 7-stelliger Gleitpunktarithmetik rechnet, auf wieviele Stellen kann das Ergebnis maximal genau sein ? Warum ?

Aufgabe 2 (5 + 2 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10^{-4} & 1 \\ 5 \cdot 10^{-1} & -5 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a.) Lösen Sie $Ax = b$ in 2-stelliger Gleitpunktarithmetik mit Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung.

b.) Wann ist Spaltenpivotisierung erforderlich ?

Aufgabe 3 (2 + 8 + 2 Punkte)

Gegeben sind die Punkte

x_i	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y_i	0	41	3

Diese Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$\alpha\, x^2 + \beta\, y = \frac{91}{55}$$

liegen. Die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode bestimmt werden.

a.) Wie lautet ein gleichwertiges lineares Ausgleichsproblem ?

b.) Bestimmen Sie eine "least-squares"-Lösung mit QR-Zerlegung mittels Householder-Transformationen. Gehen Sie dabei nicht zu den Normalengleichungen über. (Hinweise: Rechnen Sie weitestgehend mit Brüchen ! Führen Sie nur einen Householder-Schritt durch !)

c.) Warum verändert sich die Kondition einer quadratischen und invertierbaren Systemmatrix in der 2-Norm bei Multiplikation mit Householder-Matrizen nicht ?

Aufgabe 4 (6 + 4 + 1 + 2 Punkte)

Man betrachte die Funktion

$$f(x) = e^x - e^{-x} - \frac{3}{2}.$$

Sie hat im Interval $D := [0, \frac{4}{5}]$ genau eine Nullstelle $x^* = \ln 2$, die man iterativ bestimmen will. Dazu seien die beiden Iterationsvorschriften

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \phi_1(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad &&\text{mit} \quad \phi_1(x) := x - \tfrac{1}{5}e^{2x} + \tfrac{3}{10}e^x + \tfrac{1}{5} \\ x_{k+1} &= \phi_2(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad &&\text{mit} \quad \phi_2(x) := x + e^x - e^{-x} - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

gegeben.

a.) Sind die Iterationsvorschriften ϕ_1 und ϕ_2 in D kontraktiv ? Geben Sie gegebenenfalls die Lipschitzkonstanten an.

b.) Zeigen Sie, daß ϕ_1 im Intervall $D = [0, \frac{4}{5}]$ selbstabbildend ist.
(Hinweis: Zur Nullstellenbestimmung benutzen Sie die Transformation $z = e^x$.)

c.) Mit welcher Ordnung konvergiert das durch die Iterationsvorschrift ϕ_1 gegebene Fixpunktverfahren ?

d.) Führen Sie, ausgehend von $x_0 = 0$, zwei Iterationsschritte mit $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$ durch. Warum ist $|x_1 - x_0|$ größer als $|x_2 - x_1|$?